8

3386

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.

Band 103.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1888.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

8.

3384

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.

Band 103.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1888.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 103.

Seite

August, F. Ueber die Rotationsfläche kleinsten Widerstandes und über die günstigste Form der Geschossspitzen nach der *Newton*schen Theorie. Hierzu Figurentafel I. . . . . 1— 24

du Bois-Reymond, P. Bemerkungen über $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. . . . 204—229

Busche, E. Ueber grösste Ganze. . . . . 118—125

Frobenius, G. Ueber die *Jacobi*schen Covarianten der Systeme von Berührungskegelschnitten einer Curve vierter Ordnung. . . . . 139—183

Hamburger. Ueber eine specielle Klasse linearer Differentialgleichungen. . 238—273

Hensel, K. Ueber die Darstellung der Zahlen eines Gattungsbereiches für einen beliebigen Primdivisor. . . . . 230—237

Heymann, W. Bemerkung über elliptische Integrale. . . . . 87— 88

Hilbert, D. Ueber die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe. . . . . 337—345

Knoblauch, J. Ueber Fundamentalgrössen in der Flächentheorie. . . . . 25— 39

— — Ueber die Bedingung für die Isometrie der Krümmungscurven. 40— 43

Königsberger, L. Ueber die für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stattfindenden algebraischen Beziehungen. . . . . 274—320

Kötter, F. Anwendung der *Abel*schen Functionen auf ein Problem der Statik biegsamer, unausdehnbarer Flächen. . . . . 44— 74

Lerch, M. Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen. . . . 126—138

	Seite
Meyer, A. Ueber einen Satz von *Dirichlet.*	98—117
Netto, E. Untersuchungen aus der Theorie der Substitutionen-Gruppen. .	321—336
Pincherle, S. Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires.	84— 86
Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1889.	75— 76
Schafheitlin, P. Ueber die Integraldarstellung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe.	89— 97
Scheibner, W. Ueber eine Transformationsformel für Doppelintegrale. . .	77— 83
Schottky, F. Ueber specielle *Abel*sche Functionen vierten Ranges. . . .	185—203
Thomé, L. W. Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.	346—347
Weingarten, J. Ueber eine Eigenschaft der Flächen, bei denen der eine Hauptkrümmungsradius eine Function des anderen ist.	184

Ueber die Rotationsfläche kleinsten Widerstandes und über die günstigste Form der Geschossspitzen nach der *Newton*schen Theorie *).

Hierzu Figurentafel I.

(Von Herrn *F. August.*)

Die Bestimmung der günstigsten Form der Geschossspitzen kommt zurück auf die Aufsuchung derjenigen Gestalt, welche die Oberfläche eines festen Körpers haben muss, damit er einen möglichst kleinen Widerstand erleide, wenn er sich in bestimmter Richtung und mit bestimmter Geschwindigkeit durch die Luft bewegt. Dieses Problem kann streng mathematisch nur behandelt werden, wenn man auch die Bewegung der Luft berücksichtigt, und führt alsdann zu den verwickeltsten Untersuchungen der Hydrodynamik. Eine derartige, allen Anforderungen genügende Behandlung ist noch nicht durchgeführt. Dagegen hat bekanntlich schon *Newton* das Problem unter gewissen einfachen Voraussetzungen, welche mit ziemlich grosser Annäherung zuzutreffen scheinen, mathematisch behandelt und hat für Rotationskörper die Gestalt der Meridiancurve festgestellt. Später haben *Bernoulli, Fatio, Walton* und Andere diese Untersuchungen fortgesetzt. Dennoch fehlte, soweit meine Kenntniss der Literatur über diesen Gegenstand reicht, auch diesen Forschungen ein befriedigender Abschluss, so dass eine praktische Verwerthung des Resultats nicht vollständig ermöglicht wurde.

Ich glaube, dass es mir gelungen ist, die Lücke, welche in der Theorie bisher vorhanden war, auszufüllen. Auch hoffe ich, dass die grosse Einfachheit, mit welcher ich das Problem der Variationsrechnung behandelt habe, einiges Interesse verdient.

*) In ausführlicherer Weise habe ich diesen Gegenstand im 94. Bande des Archivs für die Artillerie- und Ingenieur-Officiere des deutschen Reichsheeres (Berlin, E. S. Mittler und Sohn, 1887) unter dem Titel: „Ueber die günstigste Form der Geschossspitzen nach der *Newton*schen Theorie“ behandelt.

Zunächst ist es nöthig, die eigenthümliche Schwierigkeit zu besprechen, durch welche eine vollständige Lösung bisher verhindert worden ist.

Die Voraussetzung, von welcher *Newton* und die späteren Bearbeiter des Problems, wenigstens stillschweigend, ausgingen, ist die, dass die Lufttheilchen das Geschoss nur *einmal* treffen, gegen dasselbe anprallen, ohne dass Reibung auftritt, und dass sie sich gegenseitig weder vor noch nach dem Stoss beeinflussen.

Unter diesen Voraussetzungen wird dann der einfache und praktisch wichtige Fall eingehender behandelt, dass die Oberfläche eine Rotationsfläche ist, und dass die Bewegung in Richtung der Rotationsaxe vor sich geht.

Ist df ein Element der Oberfläche des bewegten Körpers und τ der Winkel, welchen die Bewegungsrichtung des Körpers mit der Normalen in df bildet, so ist der Widerstand ein Normaldruck von der Grösse $W_0 df \cos\tau^2$, wo W_0 eine gewisse, von der relativen Geschwindigkeit v abhängige Grösse ist und den Widerstand ausdrückt, welchen die Flächeneinheit einer ebenen Oberfläche erleidet, wenn diese sich in Richtung ihrer Normale mit der Geschwindigkeit v bewegt. Durch Zusammensetzung der die Flächenelemente angreifenden Kräfte erhält man die Resultante und das resultirende Moment des Luftwiderstandes.

Ist die Oberfläche eine Rotationsfläche, und bezieht man die *Meridiancurve* auf ein in derselben Ebene liegendes rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen positive x-Axe die Rotationsaxe in der Richtung ist, in welcher relativ die Lufttheilchen sich gegen die Oberfläche bewegen, so ist die Componente des Widerstandes des Flächenelementes in Richtung der x-Axe $W_0 \pi \frac{2ydy\cos\tau^3}{\cos\tau}$, wo $\operatorname{tg}\tau = \frac{dx}{dy} = q$ ist. Wir wollen $q = \operatorname{tg}\tau$ in der Folge die ***Richtungszahl***, τ den ***Richtungswinkel*** des Elementes der Meridiancurve nennen. Die anderen Componenten des Widerstandes heben sich bei der Zusammensetzung auf. Mithin ist das resultirende Moment des Widerstandes Null, und die Resultante des Widerstandes ist eine der Bewegungsrichtung entgegengesetzte Kraft W, welche sich, wenn die Fläche von einem Bogen mit den positiven Endordinaten y_1 und y_2 beschrieben wird, folgendermassen ausdrückt:

$$W = W_0 \pi . 2 \int_{y_1}^{y_2} y\,dy \cos\tau^2 = W_0 \pi . 2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y\,dy}{1+q^2}.$$

Ist q constant, so ist die Rotationsfläche ein abgekürzter oder vollständiger Kegel, und der Widerstand ist

$$\frac{W_0\pi(y_2^2-y_1^2)}{1+q^2} = W_0\pi.(y_2^2-y_1^2)\cos^2\tau.$$

Ist $\tau = 0$, so ist die Fläche ein ebener Kreisring und der Widerstand gleich $W_0\pi(y_2^2-y_1^2)$. Dies ist der grösste Widerstand, welchen eine Rotationsfläche erleiden kann, welche sich ringförmig zwischen $y = y_1$ und $y = y_2$ erstreckt. Der grösste Widerstand, welchen ein Geschoss vom Kaliber $2r$ erleiden kann, ist $W_0\pi r^2$, und dieser Fall tritt ein, wenn das Geschoss keine Spitze hat, sondern vorn durch eine Kreisfläche vom Durchmesser $2r$ begrenzt ist.

Für eine cylindrische Fläche dagegen ist der Widerstand Null. Für eine Kugel vom Radius r kommt der *Newton*schen Theorie entsprechend nur die vordere Fläche in Betracht, und es ist $q = \frac{y}{\sqrt{r^2-y^2}}$, also

$$W = \frac{W_0\pi.2}{r^2}\int_0^r (r^2-y^2)\,y\,dy = W_0\pi\,\frac{r^2}{2},$$

d. h., wie bekannt, gleich der Hälfte des Maximalwiderstandes u. s. f. Wir bemerken, dass hier, wie im Folgenden, nur von dem Widerstande der Geschossspitze die Rede ist. Dadurch, dass auf der hinteren Seite des Geschosses sogenannter negativer Druck vorhanden ist, wird der Widerstand im Ganzen vielleicht noch etwas vergrössert. Dies wollen wir aber, ebenso wie die früheren Bearbeiter, ausser Acht lassen, wie es bei einer *Vergleichung* verschiedener Spitzenformen wohl gestattet ist, da ja alle Geschosse einen cylindrischen Theil haben und der negative Druck auf die hintere Geschosswand bei gleichem Kaliber und gleicher Geschwindigkeit wohl sehr nahezu gleich ausfallen wird.

Verlangt man nun unter der Voraussetzung des *Newton*schen Gesetzes die Gestalt einer Meridiancurve zwischen zwei gegebenen Punkten A und B so zu bestimmen, dass die von dem Bogen AB erzeugte Zone des Rotationskörpers einen möglichst kleinen Widerstand erleide, welchen Bogen wir kurz die *„Minimalcurve“* für die gegebenen Endpunkte A und B nennen wollen, so ergiebt sich, wie schon *Newton* gefunden hat, eine gewisse, weiter unten näher zu besprechende Curvengattung. ***Es ist aber nicht immer möglich, die beiden gegebenen Punkte durch eine Curve dieser Gattung zu***

verbinden. Da z. B. keine Curve dieser Gattung die Axe trifft, so ist die Lösung für *Geschossspitzen geradezu unbrauchbar.* Dies paradoxe Resultat ist zuerst von Herrn *Walton* im Quarterly Journal 1870 Band X, Seite 344 bis 346, in gewissem Sinne zutreffend erklärt worden, wenn er auch den entscheidenden Punkt nicht ganz richtig darstellt. Wir erklären die Sache, von einem ganz allgemeinen Gesichtspunkt ausgehend, folgendermassen. *Unter den Voraussetzungen* über die Wirkung des Luftwiderstandes, welche von *Newton* und den späteren Bearbeitern der Rechnung zu Grunde gelegt sind, *existirt überhaupt gar kein Minimum,* da man durch passende Wahl der Meridiancurve zwischen zwei Punkten den Widerstand beliebig klein machen kann. Man muss nur dafür sorgen, dass die Tangente der Curve bis auf einzelne Stellen hinreichend kleine Winkel mit der x-Axe bildet, wie solches in Figur 1 und 2 der Fall ist, oder bei passend gewählten gebrochenen Linien. Lassen sich aber beide Punkte durch eine Curve der von *Newton* gefundenen Art verbinden, so ist der Widerstand der entsprechenden Rotationsfläche ein *relatives* Minimum, d. h. alle Curven zwischen A und B, welche man aus jener durch sehr kleine Deformationen erhält, *bei welchen sich auch die Tangentenrichtungen nur sehr wenig ändern,* erzeugen Flächen mit grösserem Widerstand.

Man hat nun vorgeschlagen, um die Resultate der Rechnung für Geschossconstructionen zu verwerthen, die Meridiancurve aus einer solchen Curve und aus einem anderen Theil, der bis zur Axe reicht, zusammenzusetzen. Doch sind diese Vorschläge ohne rationelle Begründung und beruhen auf unbestimmten und willkürlichen Vermuthungen. Man kann aber die Sache streng mathematisch zu Ende führen. Es ist schon von früheren Bearbeitern darauf hingewiesen, dass die der Rechnung zu Grunde liegenden Voraussetzungen, welche ja in Wirklichkeit immer nur angenähert zutreffen, dann ganz gewiss in hohem Grade unzutreffend sind, wenn dieselben Lufttheilchen die Fläche mehrere Male treffen. *Daraus folgt aber, dass mit wachsender Ordinate y die Abscisse x der Curve nicht abnehmen darf;* denn sonst würden trichterförmige oder ringförmige Vertiefungen in der Oberfläche entstehen, bei denen ein wiederholtes Anprallen der Lufttheilchen unvermeidlich wäre, welches eine bedeutende Vermehrung des Widerstandes zur Folge hätte. *Es ist hiernach als unerlässliche Bedingung für eine brauchbare Lösung des Problems aufzustellen, dass für q nur positive Werthe zuzulassen sind, mit Einschluss der Null.* Hierdurch werden Meridian-

curven von der Form in Figur 1 und 2 von vornherein ausgeschlossen, und wenn y_1 und y_2, die Ordinaten der gegebenen Endpunkte, verschieden sind, ist es nicht mehr möglich, den Widerstand beliebig klein zu machen, da man $1:(1+q^2)$ nicht mehr durchweg, bis auf einzelne Stellen, beliebig klein machen kann. Der Fall, dass y_1 gleich y_2 ist, kommt nicht in Betracht; denn es versteht sich von selbst, dass alsdann die Minimalcurve die der Axe parallele Gerade AB und die Oberfläche eine cylindrische ist, welche den Widerstand Null ergiebt. ***Nimmt man also die von uns ausgesprochene Bedingung $q \geqq 0$ hinzu, so muss es stets eine Minimalcurve geben.***

Wir wollen nun diese Minimalcurve vollständig bestimmen, verallgemeinern aber zunächst das analytische Problem ein wenig, indem wir statt der Bedingung $q \geqq 0$ fordern, dass $q \geqq \alpha$ sei. α soll eine Constante bedeuten, welche kleiner als $\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$ ist, wo x_1y_1 und x_2y_2 die Coordinaten der gegebenen Punkte A und B sind, von denen wir festsetzen, dass $y_2 \geqq y_1$ sei, so dass auch $x_2 \geqq x_1$ sein muss. Wäre $\alpha > \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$, so wäre eine Verbindung beider Punkte durch eine Curve, für welche $q \geqq \alpha$ ist, unmöglich.

Es ist also zu untersuchen, für welche Wahl der Function q, welche stets $\geqq \alpha$ ist, das Integral

$$\text{(I.)} \qquad w = \int_{y_1}^{y_2} \frac{y\,dy}{1+q^2}$$

ein Minimum wird, während gleichzeitig

$$\text{(II.)} \qquad \int_{y_1}^{y_2} q\,dy = (x_2-x_1) = a$$

ist, weil die Curve A und B verbinden soll. Die Function q braucht aber nicht für das ganze Intervall demselben analytischen Gesetze zu folgen, sondern sie kann für verschiedene Theilintervalle verschieden sein, sie darf auch für irgend welche Theilintervalle constant sein.

Wir verändern nun den Weg dadurch, dass wir die Function q durch $q+\varphi$ ersetzen, wo φ eine beliebige Function bedeutet, welcher wir in dem ganzen Intervall beliebige, also auch beliebig kleine Werthe beilegen können. Damit auch die Nachbarcurve durch A und B gehe, muss

$$\text{(III.)} \qquad \int_{y_1}^{y_2} (q+\varphi)\,dy = a,$$

also mit Rücksicht auf (II.)

$$(\text{III}^a.) \qquad \int_{y_1}^{y_2} \varphi\, dy = 0$$

sein.

Für die Nachbarcurve geht w in w_1 über, und es ist

$$(\text{IV.}) \qquad w_1 - w = \int_{y_1}^{y_2} y\, dy \left[\frac{1}{1+(q+\varphi)^2} - \frac{1}{1+q^2}\right].$$

Multipliciren wir nun die Gleichung (III^a.) mit der Constanten $2c$ und addiren sie zu (IV.), so kommt

$$(w_1 - w) = \int_{y_1}^{y_2} \left[y\left(\frac{1}{1+(q+\varphi)^2} - \frac{1}{1+q^2}\right) + 2c\varphi\right] dy.$$

Soll die zweite Curve von der ersten unendlich wenig verschieden sein, so muss φ im Allgemeinen unendlich klein sein. Nur wenn in der ersten Curve q für irgend eine Ordinate y_0 plötzlich seinen Werth ändert, so darf auch φ in der Nähe von y_0 endliche Werthe haben, und es *muss* sie haben für ein unendlich kleines Intervall zwischen y_0 und $y_0 + \Delta y_0$, wenn $(q+\varphi)$ nicht mehr für die Ordinate y_0, sondern für die Nachbarordinate $y_0 + \Delta y_0$ unstetig sein soll.

Ist aber φ hinreichend klein, so können wir $\frac{1}{1+(q+\varphi)^2}$ mit Hülfe des *Taylor*schen Lehrsatzes entwickeln. Dann ergiebt sich:

$$(\text{V.}) \qquad (w_1 - w) = \int_{y_1}^{y_2} \left[2\varphi\left(-\frac{yq}{(1+q^2)^2} + c\right) + \varphi^2 \frac{(3q^2-1)y}{(1+q^2)^3} + \cdots\right] dy.$$

Soll nun die erste Curve Minimalcurve sein, so muss $(w_1 - w)$ für jeden Werth von φ, welcher der Bedingung (III^a.) entspricht, sonst aber beliebig gewählt werden kann, positiv sein, mithin auch für unendlich kleine Werthe von φ. Nun sind solche Stellen der Curve, für welche $q > \alpha$ ist, zu unterscheiden von solchen Stellen, für welche $q = \alpha$ ist. So lange $q > \alpha$ ist, kann man der Function φ sowohl positive, als negative Werthe ertheilen, um zur Nachbarcurve überzugehen, und da φ^2 für hinreichend kleine Werthe von φ gegen φ verschwindet, und das Integral (V.) dasselbe Vorzeichen hat, wie die Klammer unter dem Integralzeichen — denn dy ist positiv —, so muss der Factor der ersten Potenz von φ in dieser Klammer Null sein, also

$$(\text{VI.}) \qquad y = \frac{c(1+q^2)^2}{q}.$$

Damit aber alsdann $(w_1 - w)$ positiv sei, muss ausserdem der Factor von φ^2 in der Klammer positiv sein, also tritt zur Gleichung (VI.) noch die Bedingung hinzu:

$$\text{(VII.)} \qquad q > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aus (VI.) folgt:

$$dy = c\left(-\frac{1}{q^2} + 2 + 3q^2\right)dq, \quad dx = c\left(-\frac{1}{q} + 2q + 3q^3\right)dq.$$

Mithin ist

$$\text{(VIII.)} \qquad x = c(-\ln q + q^2 + \tfrac{3}{4}q^4) + c_1,$$

wo c_1 die Integrationsconstante bedeutet. Durch die Gleichungen (VI.) und (VIII.) sind die Coordinaten eines veränderlichen Punktes als eindeutige Functionen von q bestimmt, und zwar für jede Wahl der Constanten c und c_1. Diese Gleichungen definiren also eine Gattung von Curven, welche allein als krummlinige Bestandtheile einer Minimalcurve angehören können. Diese Curvengattung ist die bereits von ***Newton*** angegebene. (Siehe Figur 3.) Die Constante c_1 ist für die Gestalt der Curve unwesentlich. Ihrer Veränderung entspricht eine Verschiebung der ganzen Curve parallel der x-Axe. Die Constante c möge der ***Parameter*** der Curve genannt werden. Zwei Curven mit verschiedenen Parametern sind ähnlich und ähnlich liegend. Den (äusseren) Aehnlichkeitspunkt findet man, wenn man der Variabeln q für beide Curven gleiche Werthe ertheilt, die so erhaltenen entsprechenden Curvenpunkte verbindet und den Durchschnittspunkt dieser Verbindungslinie mit der x-Axe bestimmt. Jede solche Curve besitzt eine Spitze für $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Die Coordinaten derselben sind

$$\text{(IX.)} \qquad x_0 = c(\tfrac{1}{2}\ln 3 + \tfrac{5}{12}) + c_1, \quad y_0 = \frac{c16}{3\sqrt{3}}.$$

Da q gleich $\operatorname{tg}\tau$ ist, so ist für die Spitze $\tau = 30^0$.

Die beiden Aeste gehen von der Spitze aus ohne Asymptote ins Unendliche. Für den der x-Axe näheren Ast ist $q > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Seine Tangente wird immer mehr parallel der x-Axe, und der Ast ist nach der x-Axe zu concav. Nur Bogen, welche diesem Aste angehören, können Bestandtheile der Minimalcurve sein und sollen deshalb künftig kurz als Bogen einer ***Newtonschen Minimalcurve*** bezeichnet werden. Für den anderen Ast ist $q < \frac{1}{\sqrt{3}}$, er ist nach der entgegengesetzten Seite concav und geht parallel

der y-Axe ins Unendliche. Seine Bogen sind unter gewissen Bedingungen Bestandtheile einer Maximalcurve; wir können sie für unsere Untersuchungen ausser Betracht lassen. Für den Krümmungsradius ergiebt sich der Werth

$$\varrho = -\frac{c(3q^2-1)(q^2+1)^{\frac{5}{2}}}{q^2}.$$

Er durchläuft auf dem unteren Ast $q > \frac{1}{\sqrt{3}}$ alle Werthe von 0 bis $-\infty$, auf dem oberen Ast von der Spitze aus alle Werthe von 0 bis $+\infty$.

Ausser der *Newton*schen Curve können aber auch geradlinige Bestandtheile der Minimalcurve angehören, und dies bildet den zweiten Fall, der zu untersuchen ist. Sind Punkte auf einer Curve vorhanden, für welche $q = \alpha$ ist, so können wir für diese nicht φ negativ wählen, um zn einer Nachbarcurve überzugehen, weil ja auch $q+\varphi \geqq \alpha$ sein muss. Für positive unendlich kleine Werthe von φ wird aber der Werth von (w_1-w) in Gleichung (V.) dasselbe Vorzeichen haben, wie der Factor von 2φ in der Klammer unter dem Integral. Soll demnach ein geradliniger Bestandtheil, für welchen $q = \alpha$ ist, in der Minimalcurve enthalten sein, so muss für alle seine Punkte $y < \frac{c(1+\alpha^2)^2}{\alpha}$ sein. Die Ordinaten der Punkte eines geradlinigen Bestandtheils der Minimalcurve dürfen also einen gewissen Werth y_0 nicht überschreiten, in der Art, dass die Bedingung besteht

$$y \leqq y_0 \leqq \frac{c(1+\alpha^2)^2}{\alpha};$$

aber andererseits ist y_0 als Anfangspunkt des sich anschliessenden krummlinigen Theils der Minimalcurve auch der Bedingung unterworfen

$$y_0 = \frac{c(1+q_0^2)^2}{q_0},$$

wo $q_0 \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist.

Die bisher gefundenen Bedingungen für die Minimalcurve sind nothwendig, aber nicht immer hinreichend, da man nämlich, auch wenn sie erfüllt sind und ein solcher Uebergangspunkt C mit der Ordinate y_0 vorhanden ist, zu einer unendlich nahen Curve kommen könnte, welcher ein noch kleinerer Widerstand entspricht, indem man φ in der Nähe von y_0 endliche, sonst aber unendlich kleine Werthe ertheilt. Jedenfalls muss aber dann diese Nachbarcurve, wenn sie Minimalcurve ist, auch den aufgestellten Be-

dingungen genügen, und zwar auch, wenn man die Endpunkte A und B so nahe an C heranrückt, dass andere Unstetigkeiten nicht vorkommen. Dies letztere trifft zu, weil jeder Theil einer Curve, welche Minimalcurve für ihre Endpunkte ist, selbst Minimalcurve für seine Endpunkte ist. Sind nun (Figur 4) $ACPB$ und $AC'B$ zwei derartige Verbindungen, und ist die Ordinate y_0 des Punktes C kleiner als die Ordinate y_0' des Punktes C', so gehört die durch Rotation der Geraden AC entstehende Zone, ein abgekürzter Kegel, beiden Flächen an, liefert also denselben Widerstand. Der durch den Bogen CPB erzeugten Fläche aber entspricht ein kleinerer Widerstand, als der durch die gemischte Linie $CC'B$ erzeugten, ***weil erstere sogar dann der Minimalbedingung genügt, wenn man für q kleinere Werthe als α zulässt, letztere aber gewiss nicht. Es tritt deshalb für die Uebergangsordinate y_0 die Bedingung hinzu, dass sie so klein wie möglich gewählt werden muss.*** Also muss auch q_0 so klein wie möglich gewählt werden. Ist nun $\alpha \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$, so ist der kleinste mögliche Werth $q_0 = \alpha$, und der geradlinige Theil setzt sich ohne Richtungsänderung in den krummlinigen Theil fort, ist also Tangente des letzteren im Uebergangspunkte y_0. Ist dagegen $\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$, so ist der kleinste mögliche Werth $q_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, und es findet bei y_0 eine plötzliche Richtungsänderung der gesammten Minimalcurve statt. In beiden Fällen aber ist der Werth von y_0 eindeutig bestimmt. Es kann demnach nur *eine* solche Uebergangsstelle in der Minimalcurve vorhanden sein.

Man kann als allgemeines Resultat dieser Untersuchung aussprechen:

Möglich als Minimalcurve zwischen zwei gegebenen Endpunkten A und B (welche in ihrer Lage den anfangs ausgesprochenen Beschränkungen unterworfen sind) ist nur ein Linienzug, zusammengesetzt aus einem von A ausgehenden geradlinigen Theile AC mit der Richtungszahl α und einem Bogen einer Newtonschen Minimalcurve CB, der sich an den geradlinigen Theil entweder ohne Richtungsänderung ansetzt, nämlich wenn $\alpha \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$, oder doch wenigstens, wenn jenes nicht möglich ist, weil $\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$ gegeben ist, mit der denkbar geringsten. Es kann sich aber auch in gewissen Fällen der geradlinige Theil, und in einem ganz singulären Falle, nämlich wenn $\alpha = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ ist, der krummlinige Theil auf Null reduciren.

Nun lassen sich aber zwei gegebene Punkte *stets nur durch einen*

einzigen Linienzug der eben charakterisirten Art verbinden, wie man aus folgender Betrachtung erkennt. Zunächst ist klar, dass sich zwei verschiedene *Newton*sche Bogen, die derselben Rotationsaxe entsprechen, nicht in einem Punkte berühren können. Denn sind c und c' ihre beiden Parameter, c_1 und c_1' die beiden Integrationsconstanten für x, und sei xy der Berührungspunkt, q die Richtungszahl der gemeinschaftlichen Tangente, so muss sein

$$y = \frac{c(1+q^2)^2}{q} = \frac{c'(1+q^2)^2}{q},$$

$$x = c\left(\frac{3}{4}q^4+q^2-\ln q\right)+c_1 = c'\left(\frac{3}{4}q^4+q^2-\ln q\right)+c_1'.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass $c' = c$, aus der zweiten, dass $c_1' = c_1$ ist. Also ist es unmöglich, dass die beiden Curven verschieden sind. Daraus folgt aber weiter, dass sich durch zwei Punkte AB einer *Newton*schen Curve keine andere *Newton*sche Curve legen lässt; denn da in beiden die Ordinaten mit den Abscissen wachsen, müsste es sonst möglich sein, durch Verschiebung des einen Bogens parallel der x-Axe ihn in solche Lage zu bringen, dass er den andern, unverschobenen Bogen in einem Punkte berührt. Es können auch nicht zwei von derselben Geraden mit der Richtungszahl α in verschiedenen Punkten C und C' mit gleicher Richtung q_0 abgehende Bogen einer *Newton*schen Curve sich in einem Punkte B treffen. Denn sei S der Durchschnitt der Geraden CC' mit der x-Axe, dann ist S der Aehnlichkeitspunkt für die beiden *Newton*schen Curven; also muss die Gerade SB, welche von jedem der beiden in Betracht kommenden Curvenbogen, für welche $q > q_0$ ist, nur einmal getroffen wird, in zwei verschiedenen Punkten B und B' getroffen werden. Andere Möglichkeiten sind nicht vorhanden, also ist nur eine Verbindungsart möglich. Da wir andererseits bereits gesehen haben, dass ein Minimum existiren muss, so ist das gestellte Problem ***stets auf eine und nur auf eine Art lösbar.***

In dem Grenzfalle, dass $\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} = \alpha$ ist, ist überhaupt nur die geradlinige Verbindung der Punkte A und B mit den Bedingungen verträglich, also ist von einem Minimum dann keine Rede mehr. Ist noch specieller $\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} = \alpha = 0$, so ist nur die zur Axe senkrechte Gerade AB möglich, und ihre Rotationsfläche ein concentrischer Kreisring. Der Widerstand ist dann geradezu ein absolutes Maximum für gegebene Endordinaten.

Wir wollen zum Schluss noch die Gleichungen aufstellen, welche sich zur Bestimmung der Constanten, der Coordinaten eines veränderlichen Punktes der Minimalcurve und des Minimalwiderstandes selbst ergeben. Rücksichtlich des Luftwiderstandes ist zu bemerken, dass, wenn die Minimalcurve einen geraden Bestandtheil hat, der entsprechende Widerstand für sich berechnet werden muss (vergl. S. 3); hieraus entsteht das erste Glied in der Klammer bei den Formeln (XI.) und (XII.) für W. Die übrigen Glieder rühren von dem gekrümmten Theil der Minimalcurve her. Der Widerstand, welcher irgend einem Bogen der *Newton*schen Curve entspricht, ergiebt sich, wenn man y durch q ausdrückt und die Grenzen berücksichtigt, folgendermassen:

$$W = W_0 \pi c^2 \int_{q_1}^{q_2} \left(6q^3 + 10q + \frac{2}{q} - \frac{2}{q^3}\right) dq,$$

ein Integral, dessen Berechnung die in den Formeln angegebenen Werthe liefert, wenn man die untere Grenze dem betrachteten Fall entsprechend wählt.

Wir wählen den Anfangspunkt so, dass die Abscisse x_1 des ersten Punktes (A) gleich Null, also $x_2 = a$ ist, und unterscheiden drei Fälle:

I. Wenn die Minimalcurve durchweg gekrümmt ist, so ist:

(X.)
$$y_1 = \frac{c(1+q_1^2)^2}{q_1}, \quad y_2 = \frac{c(1+q_2^2)^2}{q_2}, \quad q_2 > q_1 \geqq \alpha \geqq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$a = c\left[\tfrac{3}{4}(q_2^4 - q_1^4) + (q_2^2 - q_1^2) - \ln \frac{q_2}{q_1}\right].$$

Hierdurch sind c_1, q_1 und q_2 bestimmt. Alsdann ist

$$W = W_0 \pi c^2 \left[\tfrac{3}{2}(q_2^4 - q_1^4) + 5(q_2^2 - q_1^2) + \left(\frac{1}{q_2^2} - \frac{1}{q_1^2}\right) + 2 \ln \frac{q_2}{q_1}\right].$$

Die laufenden Coordinaten sind:

$$y = \frac{c(1+q^2)^2}{q}; \quad x = c\left[\tfrac{3}{4}(q^4 - q_1^4) + (q^2 - q_1^2) - \ln \frac{q}{q_1}\right],$$

$$(q = q_1 \text{ bis } q = q_2).$$

II. Wenn die Minimalcurve aus einem geraden Theil mit der Richtungszahl $\alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$ und einem sich ohne Richtungsänderung anschliessenden Curvenbogen besteht, so ist

(XI.)
$$\left\{\begin{array}{l} y_0=\frac{c(1+\alpha^2)^2}{\alpha},\quad y_2=\frac{c(1+q_2^2)^2}{q_2},\quad x_0=(y_0-y_1)\alpha,\\ a=(y_0-y_1)\alpha+c\left[\frac{3}{4}(q_2^4-\alpha^4)+(q_2^2-\alpha^2)-\ln\frac{q_2}{\alpha}\right].\end{array}\right.$$

Hierdurch sind c, y_0, x_0, q_2 bestimmt. Alsdann ist

$$W=W_0\pi.\left[(y_0^2-y_1^2)\frac{1}{1+\alpha^2}+c^2\left(\frac{3}{2}(q_2^4-\alpha^4)+5(q_2^2-\alpha^2)+\left(\frac{1}{q_2^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)+2\ln\frac{q_2}{\alpha}\right)\right].$$

Die laufenden Coordinaten sind:

1) für den geraden Theil (von y_1 bis y_0):

$$x=\alpha(y-y_1);$$

2) für den krummen Theil:

$$y=\frac{c(1+q^2)^2}{q};\quad x=\alpha(y_0-y_1)+c\left[\frac{3}{4}(q^4-\alpha^4)+(q^2-\alpha^2)-\ln\frac{q}{\alpha}\right],$$

$$(q=\alpha \text{ bis } q=q_2).$$

III. Wenn die Minimalcurve aus einem geraden Theil mit der Richtungszahl $a<\frac{1}{\sqrt{3}}$ und aus einem mit plötzlicher Richtungsänderung sich anschliessenden Curvenbogen besteht, so ist

(XII.)
$$\left\{\begin{array}{l} y_0=\frac{c.16}{3\sqrt{3}},\quad y_2=\frac{c(1+q_2^2)^2}{q_2},\quad x_0=(y_0-y_1)\alpha,\\ a=(y_0-y_1)a+c[\frac{3}{4}(q_2^4-\frac{1}{9})+(q_2^2-\frac{1}{3})-\ln q_2\sqrt{3}].\end{array}\right.$$

Hierdurch sind c, y_0, x_0 und q_2 bestimmt. Alsdann ist

$$W=W_0\pi.\left[(y_0^2-y_1^2)\frac{1}{1+\alpha^2}+c^2\left(\frac{3}{2}(q_2^4-\frac{1}{9})+5(q_2^2-\frac{1}{3})+\left(\frac{1}{q_2^2}-3\right)+2\ln q_2\sqrt{3}\right)\right].$$

Die laufenden Coordinaten sind:

1) für den geraden Theil (von y_1 bis y_0):

$$x=\alpha(y-y_1);$$

2) für den krummen Theil:

$$y=\frac{c(1+q^2)^2}{q};\quad x=\alpha(y_0-y_1)+c[\tfrac{3}{4}(q^4-\tfrac{1}{9})+(q^2-\tfrac{1}{3})-\ln q\sqrt{3}],$$

$$\left(q=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ bis } q=q_2\right).$$

Anwendung auf Geschossspitzen.

Handelt es sich nun um die Frage, welche Form eine Geschossspitze haben muss, damit sie bei gegebener Länge $x_2 = a$ und gegebenem Kaliber $2y_2$ einen möglichst geringen Widerstand erleide, so ist in der vorigen Untersuchung zunächst $y_1 = 0$ zu setzen, und wenn nicht aus anderen Gründen, welche mit dem Luftwiderstande nichts zu thun haben, eine andere Form des vordersten Spitzentheils gefordert wird, was aber stets eine Vermehrung des Minimalwiderstandes bedingt, so ist, wie wir oben gezeigt haben, q nur an die Beschränkung geknüpft, dass es lauter positive Werthe mit Einschluss der Null annimmt. Es ist mithin $\alpha = 0$ zu setzen. Da keine *Newton*sche Curve die Axe trifft, und $a < \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, tritt dann stets der dritte der oben besprochenen Fälle ein, und die Minimalcurve setzt sich zusammen aus einer von der Axe ausgehenden, zu ihr senkrechten Geraden $AC = y_0$ und einem Bogen einer *Newton*schen Curve *CB*, welcher unter einem Winkel von 30^0 gegen die Verlängerung dieser Senkrechten nach hinten zu abgeht, und zwar anfangs mit ausserordentlich scharfer Krümmung.

Es ergiebt sich also als Form der Oberfläche der Spitze eine ebene Kreisfläche vom Durchmesser $2y_0$, welche wir die *Stirnfläche* nennen wollen, an welche sich mit scharfer Kante die Rotationsfigur der *Newton*schen Curve ansetzt, welche ebenfalls mit einer Kante in den cylindrischen Theil der Oberfläche übergeht. Wir wollen zur Erläuterung dieses in mehrfacher Hinsicht überraschenden Resultates noch folgende Ueberlegungen anstellen.

Je grösser man bei gleichem Kaliber die Länge der Spitze wählen kann, desto kleiner ist der Minimalwiderstand *W*. Denn sei (Figur 5) *ACBE* der vordere Theil des Axenprofils eines Geschosses, und zwar *ACB* Minimalcurve für die Endpunkte *A* und *B*, während *BE* parallel der Axe ist, so ist *ACBE* nicht Minimalcurve für die Endpunkte *A* und *E*. Um diese vielmehr zu erhalten, verlängere man die *Newton*sche Curve *CB* bis zum Punkte *F*, ihrem Durchschnitt mit der Geraden *AD*, und construire in Bezug auf *A* als äusseren Aehnlichkeitspunkt den Bogen *GE*, ähnlich und ähnlich liegend mit *CF*. Dann ist *AGE* Minimalcurve für die Endpunkte *A* und *E*, ihre Rotationsfläche erleidet also einen kleineren Widerstand, als die der Linie *ACBE*.

Könnte man demnach das Geschoss seiner ganzen Länge nach zuspitzen, so würde dies in Hinsicht auf den Luftwiderstand am günstigsten

sein. Dies ist aber aus anderen Gründen unstatthaft. Es darf vielmehr die Länge der Spitze einen gewissen Bruchtheil der Länge des ganzen Geschosses nicht überschreiten.

Dieser Umstand ist auch bei der folgenden Erwägung mit zu berücksichtigen. Man ist vielleicht zu dem Einwande geneigt, dass das Resultat, welches wir ausgesprochen haben, nicht richtig sein könne, weil man ja den Widerstand noch kleiner machen kann, wenn man auf die Stirnfläche einen Kegel setzt. Gewiss wird alsdann der Widerstand kleiner, aber auch die Geschossspitze länger. Lässt man aber diese grössere Länge der Geschossspitze zu, so giebt die jetzt eben gewählte Form gar nicht den Minimalwiderstand, sondern die Minimalcurve ist wieder wie oben zu construiren.

Die oben erwähnte, in Figur 5 erläuterte Construction zeigt, wie es möglich ist, mit Hülfe einer einzigen, für einen beliebigen Parameter c construirten Curve, wenn Kaliber und Spitzenlänge gegeben sind, das Axenprofil der Geschossspitze mit kleinstem Widerstande graphisch herzustellen, und zwar, indem man eine gewisse, zur gegebenen Curve ähnliche und ähnlich liegende Curve zeichnet. Dies letztere kommt aber nur auf eine Aenderung des absoluten Massstabes der ganzen Zeichnung hinaus. ***Abgesehen vom absoluten Massstabe kann man also an einer einzigen Curve alle Spitzenformen übersehen, welche minimalen Widerstand erleiden.***

In Figur 6*A* ist eine ***Newton***sche Curve ***CD*** für $c = 3mm$, in 6*B* für $c = 2mm$ construirt, und zwar symmetrisch zu beiden Seiten. Legt man nun durch diese Figur im Abstande $AD = x$ einen Querschnitt *BB* senkrecht zur Axe, dessen Länge gleich $2y$ ist, so ist ***ACBDBCA*** der Axenquerschnitt der Geschossspitze mit der Höhe x und dem Kaliber $2y$, welche kleinsten Widerstand erleidet. Wir messen nun die Länge der Spitze x und den Durchmesser der Stirnfläche $2y_0$ durch das Kaliber als Längeneinheit und setzen die Masszahl der Länge $\frac{x}{2y} = \lambda$, die Masszahl des Stirndurchmessers $\frac{2y_0}{2y} = \delta$. Für alle dem betrachteten Profil ähnlichen, in anderem Massstabe construirten Profile bleiben δ und λ ungeändert. Die ihnen entsprechenden Spitzen haben ebenfalls bei gegebenem Kaliber und gegebener Spitzenlänge kleinsten Widerstand. Um die Widerstände der verschiedenen Spitzenformen unabhängig vom absoluten Massstabe vergleichen zu können, beziehen wir sie auf den Maximalwiderstand bei

gleichem Kaliber als Einheit. Dieser Widerstand ist $Y = W_0 . \pi y^2$. Ist der Minimalwiderstand W, der Widerstand anderer Spitzenformen von gleichem Kaliber und gleicher Höhe W_1, W_2 u. s. w., so erhalten wir für sie die Masszahlen $\frac{W}{Y} = \omega$, $\frac{W_1}{Y} = \omega_1$, $\frac{W_2}{Y} = \omega_2$ u. s. w. Es ergeben sich alsdann aus unseren allgemeinen Untersuchungen folgende Gleichungen:

$$\text{(XIII.)} \qquad \lambda = \frac{x}{2y} = \frac{\frac{3}{4} q^4 + q^2 - \ln q - 0{,}96597}{2 \cdot \frac{(1+q^2)^2}{q}},$$

$$\text{(XIV.)} \qquad \delta = \frac{2y_0}{2y} = \frac{3{,}0720}{\frac{(1+q^2)^2}{q}},$$

$$\text{(XV.)} \qquad \omega = \frac{W}{Y} = \frac{W}{W_0 \pi y^2} = \frac{\frac{3}{2} q^4 + 5q^2 + \frac{1}{q^2} + 2 \ln q + 5{,}74688}{\left[\frac{(1+q^2)^2}{q}\right]^2}.$$

In der oben citirten Abhandlung im Archiv für Artillerie- und Ingenieur-Officiere ist eine Tabelle für die Coordinaten der Minimalcurve, die Widerstände entsprechend den Werthen $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 1,0, 1,1, 1,2, ... bis 3,7, sowie die Grössen λ, δ und ω mitgetheilt. Wir beschränken uns hier auf folgende drei Beispiele:

Ist die Länge der Spitze $\lambda = 0{,}66620$, d. h. rund $\frac{2}{3}$ Kaliber, so hat die Endtangente in B die Richtungszahl $q = 2{,}2$ und den Richtungswinkel $\tau = 65^0 33'$, der Durchmesser des Stirnkreises δ ist 0,19863, also fast genau $\frac{1}{5}$ Kaliber, der Minimalwiderstand beträgt 0,27824, d. h. nicht ganz 28% des Maximalwiderstandes. Dies ist eine verhältnissmässig *kurze Spitze* ($BDBCA$). Ist dagegen $\lambda = 1{,}01527$, oder rund ein Kaliber (*Spitze von mittlerer Länge* $B_1 D_1 B_1 CA$), so ist $q = 3$, $\tau = 71^0 34'$; $\delta = 0{,}09238$, also nicht ganz $\frac{1}{10}$ Kaliber, $\omega = 0{,}15710$, d. h. nicht ganz 16% des Maximalwiderstandes. Ist endlich $\lambda = 1{,}3029$ oder rund 1,3 Kaliber (*lange Spitze* $CB_2 D_2 B_2 CA$), so ist $q = 3{,}7$, $\tau = 74^0 53'$, $\delta = 0{,}05279$, also etwa $\frac{1}{20}$ des Kalibers, und $\omega = 0{,}10524$, also etwas über $10\frac{1}{2}$% des Maximalwiderstandes.

Vergleichung mit anderen Spitzenformen.

Wir wollen zur Vergleichung einige andere Spitzenformen für die drei eben besprochenen Werthe von λ in Betracht ziehen, und zwar zunächst

drei solche Spitzen, welche beim Kaliber 1 und der Länge λ eine Stirnfläche mit dem Durchmesser δ haben, wie die Minimalfläche, und die wir als *stumpfe* Geschossspitzen bezeichnen wollen, alsdann die entsprechenden *scharfen* Spitzen, für welche $\delta = 0$ ist.

Der Maximalwiderstand Y für das Kaliber 1 ist $\frac{W_0 \pi}{4}$. Dieser Werth wird, wie oben, als Einheit gewählt, um die Widerstände zu messen. Wir setzen ferner der Abkürzung wegen $1-\delta = \beta$.

1) Um den Widerstand der stumpfen conischen Spitze zu erhalten, setzen wir Winkel $CBD = \vartheta$, dann ist $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{2\lambda}{\beta}$ und

$$\omega_1 = \frac{W_1}{Y} = 4\left\{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \frac{1-\delta^2}{4}\cos\vartheta^2\right\} = \cos\vartheta^2 + \delta^2 \sin\vartheta^2.$$

2) Der Mantel des stumpfen parabolischen Ogivals (Figur 7) wird erzeugt durch einen Parabelbogen CB. Der Punkt B ist Scheitel der Parabel, die Scheiteltangente BR ist der Axe parallel. Fällt man vom Punkte P der Parabel mit den Coordinaten x und y Senkrechte auf BD und BR und nennt sie u und v, so ist

$$v = \tfrac{1}{2} - y \quad \text{und} \quad \frac{u^2}{\lambda^2} = \frac{y}{\frac{1-\delta}{2}} = \frac{2v}{\beta},$$

mithin

$$u = \lambda\sqrt{\frac{2v}{\beta}};$$

ferner ist

$$q = \operatorname{tg}\tau = \frac{u}{2v} = \frac{\lambda}{\sqrt{2v\beta}}, \quad \text{also} \quad 1+q^2 = 1+\frac{\lambda^2}{2\beta v}.$$

so dass wir erhalten

$$\omega_2 = \frac{W_2}{Y} = 4\left[\frac{\delta^2}{4} + \int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2y\,dy}{1+\frac{\lambda^2}{2\beta v}}\right],$$

oder wenn man y durch v ausdrückt und die Integration ausführt:

$$\omega_2 = 1 + 2\lambda^2 - \frac{2\lambda^4}{\beta^2}\left(1+\frac{\beta}{\lambda^2}\right)\ln\left(1+\frac{\beta^2}{\lambda^2}\right).$$

3) Der Mantel des stumpfen Kreisogivals (Figur 8) wird erzeugt durch einen Kreisbogen CB, dessen Tangente in B parallel der Axe ist.

Sei ϱ der Radius des Kreises, so ist

$$\varrho^2 = \left(\varrho - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \lambda^2, \quad \text{also} \quad \varrho = \frac{\lambda^2}{\beta} + \frac{\beta}{4}.$$

Ferner findet man

$$\sin\tau = \frac{y}{\varrho} + 1 - \frac{1}{2\varrho},$$

mithin

$$\frac{1}{1+q^2} = \cos\tau^2 = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{4\varrho^2}\right) - \frac{2}{\varrho}\left(1 - \frac{1}{2\varrho}\right)y - \frac{y^2}{\varrho^2},$$

und

$$\omega_3 = \frac{W_3}{Y} = 4\left\{\frac{\delta^2}{4} + 2\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{1}{2}} y\,dy\left[\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{4\varrho^2}\right) - \frac{2}{\varrho}\left(1 - \frac{1}{2\varrho}\right)y - \frac{y^2}{\varrho^2}\right]\right\},$$

oder nach Ausführung der Integration und kleinen Umformungen:

$$\omega_3 = \delta^2 + \frac{1}{24\varrho^2}[6(4\varrho-1)(1-\delta^2) - 8(2\varrho-1)(1-\delta^3) - 3(1-\delta^4)].$$

4) Um aus diesen drei Formeln diejenigen für die entsprechenden *scharfen* Spitzen zu erhalten, setzen wir $\delta = 0$ und erhalten:

a. für die scharfe Kegelspitze:

$$\operatorname{tg}\vartheta' = 2\lambda; \quad \omega_1' = \cos\vartheta'^2;$$

b. für das scharfe parabolische Ogival:

$$\omega_2' = 1 + 2\lambda^2 - 2\lambda^4\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right);$$

c. für das scharfe kreisförmige Ogival:

$$\varrho' = \lambda^2 + \tfrac{1}{4}; \quad \omega_3' = \frac{1}{24\varrho'^2}[8\varrho' - 1] = \tfrac{2}{3}\frac{8\lambda^2+1}{(4\lambda^2+1)^2}.$$

Nach diesen Formeln ist die nachstehende Tabelle berechnet, und zwar für drei verschiedene Werthe von λ, nämlich:

A für $\lambda = 0{,}66620$, d. h. rund $\frac{2}{3}$ Kaliber (*kurze Spitze*).
B für $\lambda = 1{,}01527$, d. h. rund 1 Kaliber (*mittlere Spitze*).
C für $\lambda = 1{,}3029$, d. h. rund $1\frac{3}{10}$ Kaliber (*lange Spitze*).

Für die stumpfen Spitzen ist δ ebenso gross wie in der entsprechenden Minimalfläche genommen.

Die Widerstände sind angegeben I in Procenten des Maximalwiderstandes für gleiches Kaliber. Um die Vergleichung zu erleichtern, sind rechts II die Widerstände noch einmal, aber gemessen durch den entsprechenden Minimalwiderstand als Einheit, angegeben.

Die Widerstände einiger Spitzenformen.

		I In Procenten des Maximalwiderstandes ω_x			II Gemessen durch den entsprechenden Minimalwiderstand $\frac{\omega_x}{\omega}$		
		A Kurz	B Mittel	C Lang	A Kurz	B Mittel	C Lang
Länge λ im Verhältniss zum Kaliber .		0,66620	1,01527	1,3029	0,66620	0,01527	1,3029
Durchmesser der Stirnfläche δ für die vier stumpfen Spitzen im Verhältniss zum Kaliber		0,19863	0,09238	0,08909	0,19863	0,09238	0,08909
Widerstände für	Minimalfläche ω . . .	27,84%	15,71%	10,52%	1	1	1
	Stumpfer Kegel ω_1 . . .	29,50%	17,37%	11,92%	1,06	1,11	1,13
	Stumpfes Parabel-Ogival ω_2 . . .	34,40%	21,24%	14,87%	1,25	1,35	1,41
	Stumpfes Kreis-Ogival ω_3 . . .	37,59%	21,70%	15,26%	1,35	1,44	1,45
	Spitzer Kegel ω'_1 . . .	36,03%	24,57%	12,84%	1,29	1,56	1,21
	Spitzes Parabel-Ogival ω'_2 . . .	37,93%	22,26%	15,27%	1,36	1,42	1,45
	Spitzes Kreis-Ogival ω'_3 . . .	39,37%	23,49%	15,72%	1,41	1,49	1,49
Maximalwiderstand		100%			3,95	6,36	9,50

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass, wie zu erwarten war, die Widerstände der verschiedenen Spitzenformen um so geringer sind, je weniger sich diese Formen von der entsprechenden Minimalfläche unterscheiden. ***Die stumpfen Spitzen mit passend gewählter Stirnfläche geben geringeren Widerstand, als die entsprechenden scharfen. Die allmähliche Ueberführung der Spitze in den cylindrischen Theil ist zur Ueberwindung des Luftwiderstandes nicht von Vortheil.*** Das spitze Kreisogival, wie es bei den Geschossen praktisch in Gebrauch ist, ist von den in Betracht gezogenen Formen

gerade die ungünstigste zur Ueberwindung des Luftwiderstandes. Auch sind die Differenzen der Widerstände für die verschiedenen Spitzenformen bei gleicher Länge so gross, dass es fraglich ist, ob sie durch anderweitige Umstände ausgeglichen werden können.

Es ist in der vorhergehenden Untersuchung weiter keine beschränkende Bedingung für die Geschossspitze aufgestellt, als diejenige, welche sich aus der Natur des Problems mit Nothwendigkeit ergiebt, dass nämlich q nicht negativ sein darf. Ist aber aus irgend welchen Gründen, z. B. wegen des Eindringens in einen Panzer, eine scharfe, vorn conisch endende Spitze erforderlich, so kann die Minimalaufgabe, unserer ersten allgemeinen Entwickelung gemäss, ganz ebenso gelöst werden, sobald die der Kegelseite entsprechende Richtungszahl $q = \alpha$ gegeben ist. Je grösser aber der gegebene Werth von α ist, desto grösser wird bei gleichem Kaliber und gleicher Länge der Spitze der Minimalwiderstand. Ist andererseits ein bestimmter Durchmesser des Stirnkreises vorgeschrieben, der grösser ist im Verhältniss zum Kaliber, als das dem gegebenen Werthe von λ entsprechende δ, so ist τ von vornherein $> 30^0$, und die Minimalcurve ist den Gleichungen (X.) entsprechend zu berechnen.

Es ist schon anfangs darauf hingewiesen worden, dass die Voraussetzungen, auf denen die Rechnung beruht, in Wirklichkeit nur angenähert zutreffen. Der Einfluss der Reibung der Luft und der Bewegung der abfliessenden Lufttheilchen, namentlich auch deren Rotation, ist nicht berücksichtigt. Der Einfluss des negativen Druckes würde zur Procentzahl des Widerstandes jeder Spitzenform einen gewissen, möglicherweise sogar von der Geschwindigkeit abhängigen Summanden zufügen, aber auf die Frage nach der günstigsten Form der Spitze wohl keinen bedeutenden Einfluss haben, wie bereits oben erörtert worden ist. Vor Allem aber bleibt die Geschossaxe nicht dauernd in der Richtung der Tangente der Flugbahn; sobald sie aber dazu schräg steht, ist der Widerstand ein ganz anderer. Eine Berücksichtigung dieser Einflüsse aber würde selbst unter vereinfachenden Hypothesen zu ausserordentlichen Schwierigkeiten führen. — Der erste Theil der Flugbahn entspricht indessen mit grosser Annäherung der Bedingung, dass die Geschossaxe die Richtung der Bahntangente hat, und da in diesem Theil die Geschwindigkeit am grössten ist, mithin der Luft-

widerstand am wirksamsten, so wird es nützlich sein, dafür zu sorgen, dass wenigstens für diesen Theil der Bewegung der Luftwiderstand so gering wie möglich ausfalle.

Bemerkung über verschiedene Widerstandsprobleme.

Man hat die Bedingung, dass die Endpunkte der Meridiancurve gegeben sind, durch andere Bedingungen ersetzt. So hat z. B. Herr ***F. A. Tarleton*** (Phil. Mag. (4) XXXIV, Referat: Fortschritte der Physik XXIII, 1867) statt dessen die Bedingung verlangt, dass die Endordinate, also die Basis des Rotationskörpers gegeben, die Anfangsordinate $y_1 = 0$ und das Volumen des Rotationskörpers constant sei, und hat als Meridian eine Ranke einer Hypocykloide mit drei Spitzen gefunden, welche die Axe zur Rückkehrtangente hat. Neuerdings hat Herr ***Starkoff*** in mehreren russisch geschriebenen Abhandlungen (Denkschriften der Odessaer Gesellschaft Bd. V und VI, Referat: Fortschritte der Mathematik Bd. XVI und XVII) dafür die Bedingung gewählt, dass bei gegebener Basis des Rotationskörpers der Flächeninhalt der Meridiancurve, welche bis zur Axe reichen muss, constant sei. Man kann auch die Ordinaten der Endpunkte der Meridiancurve und den Mantel der Rotationsfigur, oder dieselben Ordinaten und die Länge des Meridianbogens als gegeben voraussetzen. Als Minimalcurve ergiebt sich bei gegebener Oberfläche eine Gerade, bei gegebenem Bogen eine Curve, welche in unserer Bezeichnung dargestellt ist durch die Gleichungen:

$$y = \frac{c}{\cos\tau^3}, \quad x = \tfrac{3}{8}c\left[\frac{2\sin\tau}{\cos\tau^4} - \frac{\sin\tau}{\cos\tau^2} + \tfrac{1}{2}\ln\frac{1-\sin\tau}{1+\sin\tau}\right],$$

und welche, wie ich aus einer Notiz in einer französisch geschriebenen Abhandlung des Herrn ***Starkoff*** (Bulletin de la Société Mathém. de France XIII, 1884–1885, Seite 133) ersehe, bereits von ***Legendre*** gefunden zu sein scheint. Diese Curve muss übrigens nöthigenfalls vom Punkte $\tau = 0$, $y = c$ aus durch eine Senkrechte zur y-Axe bis zur gegebenen Anfangsordinate fortgesetzt werden. Bei allen diesen Problemen gelten dieselben Erwägungen in Bezug auf q, wie wir sie für das *Newton*sche Problem entwickelt haben. Lässt man für q beliebige Werthe zu, so kann man bei gegebenem Volumen oder bei gegebenem Inhalt der Meridianfläche durch Zickzacklinien, oder durch Linien wie in Fig. 2 erreichen, dass das Integral $\int_0^a \frac{y\,dy}{1+q^2}$ beliebig

nahe an Null kommt. Bei gegebenem Mantel der Rotationsfigur oder gegebener Länge des Meridianbogens hat zwar der Widerstand ein von Null verschiedenes Minimum, aber man kann der Meridiancurve unbegrenzt viele Gestalten geben, da man jeden beliebigen Bogen einer Minimalcurve stets durch sein Spiegelbild gegen eine zur x-Axe senkrechte Gerade ersetzen kann, wie dies Herr ***Walton*** bei der ***Newton***schen Curve gethan hat. Nimmt man aber die auf Seite 4 sachlich begründete Bedingung $q \geqq 0$ hinzu, so giebt es stets ein von Null verschiedenes Minimum, und auch die Meridiancurve wird, bis auf einen gewissen Fall, den wir noch besprechen werden, eindeutig bestimmt. Ich glaube, dass erst durch diese Beschränkung, die ich in keiner der früheren Bearbeitungen angedeutet finde, die Untersuchung einen befriedigenden Abschluss erhält. Uebrigens kann auch bei diesen vier Problemen die Entwickelung ganz analog der oben bei dem *Newton*schen Problem angewendeten Methode durch Benutzung des ***Taylor***schen Satzes geschehen; es ergeben sich dann die Resultate in ebenso einfacher Weise. Bei den beiden letztgenannten Problemen ist es bequem, statt der Grösse q die Grösse $u = \sqrt{1+q^2} = \frac{1}{\cos\tau}$ in die Rechnung einzuführen. Ist dann $u = 1$, so darf die Variation von u nicht negativ gewählt werden, weil sonst q imaginär würde.

Sind Stellen vorhanden, in welchen q (oder u) unstetig ist, so kann die Variationsrechnung nichts entscheiden, weil genau wie wir es oben gezeigt haben, alsdann auch endliche Veränderungen von q (oder u) zugelassen werden müssen. Hier müssen dann andere Betrachtungen hinzukommen, wie wir sie oben auch anwenden mussten.

Die Lösung der ***Tarleton***schen Aufgabe, welche übrigens auch in die Aufgabensammlung von ***Sohncke***, vierte Auflage, Halle 1877, herausgegeben von ***Amstein***, Theil II, Seite 279 übergegangen ist, ist dahin zu ergänzen, dass man an die von der Axe als Rückkehrtangente im Punkte A ausgehende Hypocykloidenranke im anderen Endpunkte der Ranke (Rückkehrpunkte) eine nach aussen führende Gerade, welche senkrecht zur Axe steht, ansetzt. Nur bei hinlänglich grossem gegebenem Volumen fällt der Endpunkt des Meridians in den hypocykloidischen Theil, bei verhältnissmässig kleinem Volumen dagegen fällt er auf den geradlinigen Theil. Im letzteren Falle entspricht dem geradlinigen Theil zwar das Volumen Null, er ist aber nöthig, damit die Endordinate die vorgeschriebene Grösse erhalte.

Das Resultat, welches Herr ***Starkoff*** bei seinem Problem gefunden hat, ist mir nicht zugänglich gewesen. Ich theile aber das Resultat mit, wie ich es nach meiner Methode gefunden habe, da dieser Fall theoretisch besonders interessant ist. Hierbei ist vorausgesetzt, dass $q \geqq 0$ sei, da bei beliebigem q kein Minimum existirt. Nennt man die gegebene Endordinate a, die gegebene Meridianfläche f, so findet man durch stetige Variation, dass die Meridiancurve nur aus Geraden zusammengesetzt sein kann, welche theils der y-Axe, theils einer gewissen anderen Richtung parallel sind, für welche $\tau > 30^0$ ist. Es muss nun durch anderweitige Betrachtungen entschieden werden, welche von diesen unzähligen gebrochenen Linien, die nicht durch stetige Veränderung von q, also durch unendlich kleine Werthe von φ in einander übergeführt werden können, den kleinsten Widerstand leistet. Es ist aber leicht zu erkennen, dass alle Meridianlinien zwischen den Ordinaten Null und a, welche zusammengesetzt sind aus Geraden $\tau = 0$ und $\tau = \tau_1$, wofern sie denselben Flächeninhalt f abschneiden, auch denselben Widerstand der Rotationsfläche ergeben. Es wird nämlich

$$w = \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}f\sin 2\tau_1,$$

wobei übrigens stets $f < \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\tau_1$ ist. Der Widerstand ist also am kleinsten, wenn τ_1 möglichst nahe an 45^0 liegt. Ist nun $f \geqq \frac{1}{2}a^2$, so ist diese Bedingung nur erfüllt durch eine einzige Gerade, für welche $q = \frac{2f}{a^2}$ ist. Ist aber $f < \frac{1}{2}a^2$, so kann man als Minimalcurve jede Linie wählen, welche aus geradlinigen Stücken mit den Richtungswinkeln Null und 45^0 besteht, und welche den gegebenen Flächeninhalt abschneidet. Die Aufgabe hat also in diesem Fall unendlich viele Lösungen.

Ob Herr ***Starkoff*** dieses Resultat auch gefunden hat, weiss ich nicht. Dagegen muss ich hervorheben, dass sich in der französisch geschriebenen Arbeit des Herrn ***Starkoff***, Sur la résolution des problèmes géométriques par le calcul des variations (Bull. de la Société Mathématique de France XIII (1884—85) S. 133 ff.) und nach dem Referat auch in den russisch geschriebenen Abhandlungen bedenkliche Unklarheiten und Fehler finden. Herr ***Starkoff*** glaubt nämlich ein Mittel gefunden zu haben, um die Zickzacklinien, welche bei Minimalcurven vorkommen können, auch durch die Methoden der Variationsrechnung zu bestimmen, und zwar, indem er das Bogenelement ds zur unabhängigen Variable nimmt, aber die Bedingung

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

fallen lässt und nur die beiden Beschränkungen $dx^2 \gtreqless ds^2$, $dy^2 \leqq ds^2$ bestehen lässt. Dieser höchst merkwürdigen Auffassung ist schon Herr *Sonine* in zwei russisch geschriebenen Artikeln (Denkschriften der Odessaer Ges. Bd. VI) entgegengetreten, indem er sich auf *Moigno*, Calcul des variations p. 235 bezieht, und auch der Referent in den „Fortschritten der Mathematik" Herr *Wassilieff* schliesst sich diesem Urtheil an. Da mir die Gründe dieser Herren nicht bekannt sind, so möchte ich bemerken, was ich gegen Herrn *Starkoff*s Auffassungen einzuwenden habe, so weit sie in der französisch geschriebenen Abhandlung entwickelt sind. Ist q (nach unserer Bezeichnung) bestimmt, so ist $dx^2+dy^2 = ds^2$. Wenn also $dx^2+dy^2 \geqslant ds^2$ ist, so ist die Richtungszahl q unbestimmt, also auch der diesem Elemente entsprechende Widerstand, so dass für die Untersuchungen jede Basis fehlt. Aber selbst wenn man diese Unbestimmtheit an einzelnen Stellen zuliesse, so müsste man doch an denselben Stellen endliche Variationen von q zulassen, und diese sind beim Variationscalcül ausgeschlossen. Die Wahl der unabhängigen Variabeln bestimmt nur die äussere Form der Rechnung, kann aber sachlich nichts ändern. Herr *Starkoff* will nun seine Anschauung durch ein Beispiel rechtfertigen. Dies ist aber gänzlich verfehlt. Herr *Starkoff* will nachweisen, dass die *Newton*sche Curve gar nicht minimalen Widerstand leiste, sondern eine Curve, welche er durch seine Methode findet. Nun kommt aber in seiner ganzen Entwickelung keine einzige Stelle vor, bei welcher man $dx^2+dy^2 \gtrless ds^2$ setzen müsste, und die Curve, welche er findet, ist — die *Legendre*sche. Er hat also stillschweigend, ohne es zu bemerken, die *Newton*sche Bedingung, dass die Endpunkte der Meridiancurve gegeben seien, fortgelassen, und statt dessen die Bedingung, dass die Bogenlänge constant sei, hineingenommen. Da Herr *Starkoff* diese Bedingungen gar nicht erwähnt, die Constanten nicht bestimmt, namentlich in die Integrale, die den Widerstand ausdrücken, nicht die den Bedingungen entsprechenden Integrationsgrenzen einführt, so ist die von ihm angestellte Vergleichung der Widerstandsintegrale vollkommen illusorisch. Würde er zwei Punkte einmal durch einen Bogen einer *Newton*schen Curve und das andere Mal durch einen Bogen einer *Legendre*schen Curve verbinden, und für beide die Widerstände berechnen, so würde er finden, dass der *Legendre*schen Curve grösserer Widerstand entspricht, als der *Newton*schen.

Andererseits habe ich durch die Besprechung der fünf Widerstandsprobleme gezeigt, dass sich dieselben sämmtlich bei gehöriger Unter-

scheidung zwischen endlichen und unendlich kleinen Aenderungen von q vollständig lösen lassen, und zwar selbstverständlich mit Beibehaltung der Bedingung $dx^2 + dy^2 = ds^2$. Selbst wenn unendlich oft gebrochene Linien als Minimalcurven auftreten, nämlich wenn man für q auch negative Werthe zulässt, oder auch in dem oben besprochenen Fall des *Starkoff*schen Problems findet man durch die von mir angewendeten Methoden alles, was zum vollständigen Verständniss und zur allgemeinsten Lösung des Problems erforderlich ist.

Ueber Fundamentalgrössen in der Flächentheorie.

(Von Herrn *J. Knoblauch.*)

1.

Untersucht man die allgemeinen Eigenschaften einer krummen Fläche unter der Voraussetzung, dass die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten x, y, z ihrer Punkte als Functionen zweier reellen, unabhängigen Variablen u, v gegeben sind, so wird man bekanntlich auf gewisse Verbindungen aus den ersten und zweiten Ableitungen von x, y, z nach u und v geführt, welche wegen ihrer grundlegenden Bedeutung für die in Rede stehenden Untersuchungen als Fundamentalgrössen bezeichnet werden. Die sechs von *Gauss* eingeführten Grössen sind durch die Gleichungen definirt:

$$(1.)\qquad E=\Sigma\Big(\frac{\partial x}{\partial u}\Big)^2,\quad F=\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\quad G=\Sigma\Big(\frac{\partial x}{\partial v}\Big)^2,$$

$$(2.)\qquad \begin{cases} D=\Sigma\Big(\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}-\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}\Big)\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad D'=\Sigma\Big(\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}-\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}\Big)\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}, \\ D''=\Sigma\Big(\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}-\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}\Big)\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \end{cases}$$

in welchen unter $\Sigma f(x, y, z)$ der Ausdruck $f(x, y, z)+f(y, z, x)+f(z, x, y)$ verstanden wird. Von ihnen hängen diejenigen geometrischen Bestimmungen ab, welche in der Theorie der Krümmung der Flächen betrachtet werden, und namentlich sind die Summe und das Product der Hauptkrümmungen durch einfache algebraische Functionen von $E, \ldots D''$ gegeben. Schon der Ansatz der Gleichungen (1.), (2.) setzt eine Anzahl von Eigenschaften der (reellen) Functionen x, y, z voraus: sie müssen nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung für alle Werthepaare (u, v) eines gewissen Bereiches endliche, bestimmte Werthe haben, und es muss ferner, damit D' eindeutig bestimmt sei, die Gleichung

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}$$

für $g = x, y, z$ stattfinden, wofür die Stetigkeit der beiden einander gleichgesetzten Differentialcoefficienten hinreichend ist. Die Grössen E, G, sowie der ebenfalls als Quadratsumme darstellbare Ausdruck

$$EG - F^2 = T^2$$

werden für alle Punkte des betrachteten Bereiches als positiv angenommen. Wie die verschiedenen, für die Flächentheorie nöthigen Annahmen sich geometrisch interpretiren lassen, soll hier nicht entwickelt werden; ausführliche Erörterungen über diesen Gegenstand finden sich z. B. in der Abhandlung des Herrn *Beltrami:* Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque [Annali di Matematica, Serie II, T. 1, p. 329 (1867)].

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung hängen mit dem Linienelement ds der Fläche durch die Gleichung

$$(3.) \qquad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

zusammen. Sie bilden also die Coefficienten einer beständig positiven, binären quadratischen Differentialform. Führt man an Stelle von u, v andere krummlinige Coordinaten u', v' ein, welche mit den ersteren durch zwei Gleichungen verbunden zu denken sind, und setzt

$$ds^2 = E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2,$$

so gelangt man zu Formeln für die Transformation von E, F, G einfach dadurch, dass man die linearen Substitutionen

$$(4.) \qquad \begin{cases} du' = \dfrac{\partial u'}{\partial u} du + \dfrac{\partial u'}{\partial v} dv = \alpha du + \beta dv, \\ dv' = \dfrac{\partial v'}{\partial u} du + \dfrac{\partial v'}{\partial v} dv = \gamma du + \delta dv \end{cases}$$

einführt und die Coefficienten von du^2, $2du dv$, dv^2 in beiden Ausdrücken von ds^2 vergleicht. So ergiebt sich

$$(5.) \qquad \begin{cases} E = E'\alpha^2 + 2F'\alpha\gamma + G'\gamma^2, \\ F = E'\alpha\beta + F'(\alpha\delta + \beta\gamma) + G'\gamma\delta, \\ G = E'\beta^2 + 2F'\beta\delta + G'\delta^2. \end{cases}$$

Durch Auflösung nach E', F', G' würden diejenigen Gleichungen folgen, welche *Gauss* am Schluss des Art. 21 der Disquisitiones generales circa superficies curvas gegeben hat.

Auch die Grössen D, D', D'' stehen mit einer quadratischen Differentialform in Zusammenhang. Denn bezeichnet man mit ϱ den Krüm-

mungsradius desjenigen, durch den Punkt (uv) gehenden Normalschnitts, welcher durch das Verhältniss $du : dv$ bestimmt, und dessen Bogenelement ds ist, so hat man, wie bekannt,

$$(6.) \qquad \frac{ds^2}{\varrho}\sqrt{EG-F^2} = D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2.$$

Doch besitzt die linke Seite hier nicht, wie in der Gleichung (3.), eine von der Wahl der Coordinaten unabhängige geometrische Bedeutung. In Folge dessen kann auch die Transformation der *Gauss*schen Fundamentalgrössen zweiter Ordnung nicht unmittelbar aus (6.) geschlossen werden. Dividirt man dagegen von vornherein beide Seiten der Gleichung durch die (positiv angenommene) Grösse T und setzt

$$(7.) \qquad \frac{D}{\sqrt{EG-F^2}} = L, \quad \frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}} = M, \quad \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}} = N,$$

so wird:

$$(8.) \qquad \frac{ds^2}{\varrho} = Ldu^2+2M\,du\,dv+Ndv^2,$$

und aus der Unveränderlichkeit der linken Seite beim Uebergange zu neuen Coordinaten folgt jetzt, dass die Transformationsformeln für L, M, N dieselben bleiben wie die für E, F, G, nämlich:

$$(9.) \qquad \begin{cases} L = L'\alpha^2+2M'\alpha\gamma+N'\gamma^2, \\ M = L'\alpha\beta+M'(\alpha\delta+\beta\gamma)+N'\gamma\delta, \\ N = L'\beta^2+2M'\beta\delta+N'\delta^2. \end{cases}$$

Behielte man die *Gauss*schen Grössen bei, so würde rechts noch die Functionaldeterminante

$$\alpha\delta-\beta\gamma = \Delta$$

als Factor auftreten; sie fällt durch Hinzunahme der aus (5.) folgenden Gleichung

$$EG-F^2 = (E'G'-F'^2)\Delta^2$$

heraus.

Für die allgemeine Flächentheorie sind die Transformationsgleichungen in der Form (9.) von besonderer Wichtigkeit. Daher empfiehlt es sich, L, M, N an Stelle von D, D', D'' als Fundamentalgrössen zweiter Ordnung zu verwerthen, was in neuerer Zeit von Herrn *Hoppe* [Principien der Flächentheorie, Leipzig 1876] durchgeführt worden ist. Zum ersten Mal scheinen jene Grössen von Herrn *Brioschi* [Sulla teoria delle coordinate

für $g = x, y, z$ stattfinden, wofür die Stetigkeit der beiden einander gleichgesetzten Differentialcoefficienten hinreichend ist. Die Grössen E, G, sowie der ebenfalls als Quadratsumme darstellbare Ausdruck

$$EG - F^2 = T^2$$

werden für alle Punkte des betrachteten Bereiches als positiv angenommen. Wie die verschiedenen, für die Flächentheorie nöthigen Annahmen sich geometrisch interpretiren lassen, soll hier nicht entwickelt werden; ausführliche Erörterungen über diesen Gegenstand finden sich z. B. in der Abhandlung des Herrn *Beltrami:* Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque [Annali di Matematica, Serie II, T. 1, p. 329 (1867)].

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung hängen mit dem Linienelement ds der Fläche durch die Gleichung

$$(3.) \qquad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

zusammen. Sie bilden also die Coefficienten einer beständig positiven, binären quadratischen Differentialform. Führt man an Stelle von u, v andere krummlinige Coordinaten u', v' ein, welche mit den ersteren durch zwei Gleichungen verbunden zu denken sind, und setzt

$$ds^2 = E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2,$$

so gelangt man zu Formeln für die Transformation von E, F, G einfach dadurch, dass man die linearen Substitutionen

$$(4.) \qquad \begin{cases} du' = \dfrac{\partial u'}{\partial u} du + \dfrac{\partial u'}{\partial v} dv = \alpha du + \beta dv, \\ dv' = \dfrac{\partial v'}{\partial u} du + \dfrac{\partial v'}{\partial v} dv = \gamma du + \delta dv \end{cases}$$

einführt und die Coefficienten von du^2, $2du dv$, dv^2 in beiden Ausdrücken von ds^2 vergleicht. So ergiebt sich

$$(5.) \qquad \begin{cases} E = E'\alpha^2 + 2F'\alpha\gamma + G'\gamma^2, \\ F = E'\alpha\beta + F'(\alpha\delta + \beta\gamma) + G'\gamma\delta, \\ G = E'\beta^2 + 2F'\beta\delta + G'\delta^2. \end{cases}$$

Durch Auflösung nach E', F', G' würden diejenigen Gleichungen folgen, welche *Gauss* am Schluss des Art. 21 der Disquisitiones generales circa superficies curvas gegeben hat.

Auch die Grössen D, D', D'' stehen mit einer quadratischen Differentialform in Zusammenhang. Denn bezeichnet man mit ϱ den Krüm-

mungsradius desjenigen, durch den Punkt (uv) gehenden Normalschnitts, welcher durch das Verhältniss $du : dv$ bestimmt, und dessen Bogenelement ds ist, so hat man, wie bekannt,

$$(6.) \qquad \frac{ds^2}{\varrho}\sqrt{EG-F^2} = D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2.$$

Doch besitzt die linke Seite hier nicht, wie in der Gleichung (3.), eine von der Wahl der Coordinaten unabhängige geometrische Bedeutung. In Folge dessen kann auch die Transformation der *Gauss*schen Fundamentalgrössen zweiter Ordnung nicht unmittelbar aus (6.) geschlossen werden. Dividirt man dagegen von vornherein beide Seiten der Gleichung durch die (positiv angenommene) Grösse T und setzt

$$(7.) \qquad \frac{D}{\sqrt{EG-F^2}} = L, \quad \frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}} = M, \quad \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}} = N,$$

so wird:

$$(8.) \qquad \frac{ds^2}{\varrho} = L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2,$$

und aus der Unveränderlichkeit der linken Seite beim Uebergange zu neuen Coordinaten folgt jetzt, dass die Transformationsformeln für L, M, N dieselben bleiben wie die für E, F, G, nämlich:

$$(9.) \qquad \begin{cases} L = L'\alpha^2+2M'\alpha\gamma+N'\gamma^2, \\ M = L'\alpha\beta+M'(\alpha\delta+\beta\gamma)+N'\gamma\delta, \\ N = L'\beta^2+2M'\beta\delta+N'\delta^2. \end{cases}$$

Behielte man die *Gauss*schen Grössen bei, so würde rechts noch die Functionaldeterminante

$$\alpha\delta-\beta\gamma = \Delta$$

als Factor auftreten; sie fällt durch Hinzunahme der aus (5.) folgenden Gleichung

$$EG-F^2 = (E'G'-F'^2)\Delta^2$$

heraus.

Für die allgemeine Flächentheorie sind die Transformationsgleichungen in der Form (9.) von besonderer Wichtigkeit. Daher empfiehlt es sich, L, M, N an Stelle von D, D', D'' als Fundamentalgrössen zweiter Ordnung zu verwerthen, was in neuerer Zeit von Herrn *Hoppe* [Principien der Flächentheorie, Leipzig 1876] durchgeführt worden ist. Zum ersten Mal scheinen jene Grössen von Herrn *Brioschi* [Sulla teoria delle coordinate

curvilinee, Annali di Matematica, Serie II, T. 1, p. 1 (1867)] benutzt worden zu sein.

Führt man die Richtungscosinus X, Y, Z der nach einer bestimmten Seite genommenen Flächennormale ein, setzt also

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)=X, \quad \ldots,$$

so lassen die Definitionsgleichungen für die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung sich schreiben:

$$(10.) \qquad \Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=L, \quad \Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=M, \quad \Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=N.$$

Hervorgehoben sei noch, dass wegen $EG-F^2>0$ die Grössen L, M, N gleichzeitig mit D, D', D'' den Charakter ganzer Functionen besitzen.

2.

Die Aufgaben, welche die Theorie der Flächen zu lösen hat, insofern nicht höhere als zweite Ableitungen ins Spiel kommen, stehen im engsten Zusammenhange mit der simultanen Transformation der beiden durch (3.) und (8.) definirten quadratischen Differentialformen. Diese Erkenntniss, welche namentlich durch die Arbeiten des Herrn *Weingarten* in helles Licht gesetzt worden ist, giebt nach zwei Seiten hin zu neuen Problemen Veranlassung. Einmal nämlich kann man nach allen Folgerungen fragen, welche sich aus (5.) und (9.) unter Voraussetzung der Constanz von E, F, G, ... L', M', N' ziehen lassen. Diese Frage ist gleichbedeutend mit der Forderung, die algebraische Theorie der quadratischen Formen auf die Geometrie anzuwenden. Die zweite Art von Untersuchungen, welche als eine Ausdehnung der ersteren zu bezeichnen ist, nimmt nicht nur du, dv, sondern auch u, v als variabel an; es werden dann gleichzeitig mit den Fundamentalgrössen auch ihre Ableitungen betrachtet. Als Resultat der ersten Klasse von Untersuchungen ergiebt sich z. B. die geometrische Bedeutung der absoluten simultanen Invarianten

$$\frac{GL-2FM+EN}{EG-F^2}=H \quad \text{und} \quad \frac{LN-M^2}{EG-F^2}=K$$

als Summe und Product der beiden Hauptkrümmungen $\frac{1}{\varrho_1}$, $\frac{1}{\varrho_2}$; in der zweiten Gruppe erscheint als Hauptergebniss der *Gauss*sche Satz von der Unveränderlichkeit des Krümmungsmasses bei allen Biegungen einer Fläche.

Die gleichzeitige Transformation der Differentialausdrücke

$$E du^2+2F du dv+G dv^2 = A \quad \text{und} \quad L du^2+2M du dv+N dv^2 = B$$

zieht die der Formen

$$\varkappa A+\lambda B$$

nach sich, in welchen $\varkappa$, λ Constanten oder gegebene Functionen der Invarianten bedeuten. Unter diesen Formen ist die Grösse

$$d\sigma^2 = -KA+HB$$

von Wichtigkeit, da sie das Bogenelement der *Gauss*schen Kugel liefert, welches dem Linienelement ds der ursprünglichen Fläche entspricht. Ausserdem ist von besonderem Interesse die simultane Covariante der beiden Formen, welche sich nicht in der obigen Gestalt darstellen lässt. Sie bestimmt, gleich Null gesetzt, die Krümmungslinien der Fläche, während $B = 0$, falls $LN-M^2 < 0$ ist, die Asymptotencurven liefert. Wollte man die Covariante durch den Ausdruck

$$(EM-FL)du^2+(EN-GL)du dv+(FN-GM)dv^2$$

definiren, wie er unmittelbar durch die Algebra gegeben wird, so würde sich dieser bei einer Transformation um die Functionaldeterminante Δ ändern. Es empfiehlt sich daher auch hier, die Coefficienten durch T zu dividiren.

Diese Coefficienten hängen in einfacher Weise mit den Grössen η, ϑ, η', ϑ' zusammen, welche in den, von Herrn *Weingarten* in die Flächentheorie eingeführten Formeln

$$(11.) \qquad \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{T^2}\left(\eta \frac{\partial x}{\partial u}+\vartheta \frac{\partial x}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{1}{T^2}\left(\eta' \frac{\partial x}{\partial u}+\vartheta' \frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

vorkommen. Es ist nämlich

$$(12.) \qquad \eta = FM-GL, \quad \vartheta = FL-EM, \quad \eta' = FN-GM, \quad \vartheta' = FM-EN,$$

und die Covariante hat den Ausdruck

$$(13.) \qquad \frac{1}{T}(-\vartheta du^2-(\vartheta'-\eta)du dv+\eta' dv^2) = \Gamma.$$

Was ihre geometrische Bedeutung betrifft, so ist

$$(14.) \qquad \Gamma^2 = ds^4\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho}\right)\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_2}\right) = -KA^2+HAB-B^2.$$

Eine Untersuchung der Flächen, welche über die gewöhnliche Krümmungstheorie hinausgehen will, erfordert die Einführung der Differential-

coefficienten höherer als zweiter Ordnung. Auch die vollständige Discussion der Krümmungsmittelpunktsflächen hinsichtlich ihrer Krümmung würde schon die Betrachtung der Ableitungen dritter Ordnung nöthig machen. Soll eine derartige Untersuchung zu übersichtlichen Resultaten leiten, so ist es vor allem nothwendig, Grössen einzuführen, welche geeignet sind, für die höheren Ordnungen die Rolle von Fundamentalgrössen zu übernehmen. Es erscheint zweckmässig, solche Grössen als Coefficienten von Differentialausdrücken aufzufassen; und es wäre von diesem Gesichtspunkte aus als Aufgabe der Flächentheorie überhaupt die Anwendung der binären Differentialformen $n$ten Grades auf die Geometrie zu bezeichnen. Es soll hier nicht ausgeführt werden, wie man allgemein zu einer solchen Anwendung gelangen könnte; die anzustellenden Erörterungen sollen sich vielmehr auf den Fall $n = 3$ beschränken.

3.

Welche Ausdrücke als Fundamentalgrössen dritter Ordnung betrachtet werden sollen, hängt von Erwägungen verschiedener Art ab. Knüpft man die Grössen an eine *quadratische* Differentialform

$$A du^2 + 2B du dv + C dv^2,$$

so hat man den Vortheil, durch $A = 0$, $C = 0$ die beiden Curvenschaaren, welche durch Nullsetzung der Form erhalten werden, als Coordinatenlinien kennzeichnen zu können. Vom geometrischen Standpunkte aus bietet sich hier das Product der Differentiale der Hauptkrümmungen als zweckmässig einzuführende Form dar. Man kann dann die Linien constanter Hauptkrümmungsradien, wo es nöthig ist, als Coordinatenlinien einführen. Allein einerseits fallen diese beiden Curvenschaaren für die wichtige Klasse der *Weingarten*schen Flächen (für welche der eine der beiden Hauptkrümmungsradien eine Function des anderen ist) in *eine* zusammen, und andererseits sind die Grössen, zu welchen man gelangt, in den Ableitungen der Coordinaten nicht linear. Verzichtet man darauf, dass die Anzahl der Fundamentalgrössen auch für die dritte Ordnung gleich 3 sein solle, so könnte man die Ableitungen irgend zweier von einander unabhängigen Functionen der Hauptkrümmungen, z. B. der Ausdrücke

$$H = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}, \quad K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2},$$

nach den krummlinigen Coordinaten genommen, als die zu bestimmenden Grössen annehmen. Doch erscheint es, falls vier Fundamentalgrössen eingeführt werden sollen, zweckmässiger, sie so zu wählen, dass durch sie eine Anwendung der ***kubischen*** Differentialformen auf die Geometrie angebahnt wird. Dies wird durch die Betrachtung derjenigen Normalschnitte geleistet, welche von ihrem Krümmungskreise superosculirt (vierpunktig berührt) werden.

Eine rein äusserliche Verallgemeinerung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung würde es sein, wenn man die entsprechenden Grössen dritter Ordnung durch die Ausdrücke

$$(15.) \qquad \Sigma X \frac{\partial^3 x}{\partial u^3} = a, \quad \Sigma X \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} = b, \quad \Sigma X \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2} = c, \quad \Sigma X \frac{\partial^3 x}{\partial v^3} = d$$

definiren wollte. Dennoch ist der Ansatz dieser Grössen insofern von Nutzen, als er zu einem einfachen Beweise für zwei der drei flächentheoretischen Fundamentalgleichungen führt. Letztere Formeln, welche Beziehungen zwischen den Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung herstellen, sind wohl zuerst von ***Mainardi*** [Su la teoria generale delle superficie, Giornale dell' Istituto Lombardo T. 9 (1857), p. 394—395] angegeben worden; sie treten in allen Arbeiten, welche in den letzten Jahrzehnten über die allgemeine Theorie der krummen Flächen veröffentlicht worden sind, unter den verschiedensten Formen auf. Man beweist die Gleichungen gewöhnlich auf einem ziemlich umständlichen Wege: Zuerst werden die Ableitungen zweiter Ordnung der Coordinaten durch die der ersten Ordnung und durch die Richtungscosinus der Normale dargestellt, als homogene lineare Functionen, deren Coefficienten nur von den Fundamentalgrössen abhängen; alsdann bildet man die Differentialquotienten dritter Ordnung $\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v}$, $\frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2}$ etc. auf zwei verschiedene Arten und setzt die Ausdrücke einander gleich. Hieraus ergiebt sich leicht die Existenz von sechs Gleichungen unter den Fundamentalgrössen, von denen jedoch drei, wie die Durchführung der Rechnung lehrt, die drei übrigen nach sich ziehen. Jene drei Formeln sind die gesuchten; die eine, welche die Ableitungen der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung nicht enthält, entspricht dem *Gauss*schen Satze.

Nicht kürzer ist der Weg, welchen neuerdings Herr ***Lipschitz*** [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1883] zum Beweise der Fundamentalgleichungen eingeschlagen hat. Die Methode beruht auf

einem Hindurchgehen durch die Abbildung auf die *Gauss*sche Kugel, insofern die Differentiale der Cartesischen Coordinaten zuerst durch sphärische Coordinaten, dann durch allgemeine Parameter dargestellt werden. Die Integrabilitätsbedingungen für die gefundenen Ausdrücke liefern die gesuchten Formeln, und zwar sofort in der richtigen Anzahl.

Wenn es sich nur darum handelt, die beiden Fundamentalgleichungen zu beweisen, welche die Ableitungen der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung enthalten, so verfährt man einfach folgendermassen. Man differentiirt die Gleichungen (10.) nach u und v, wodurch sich für a, b, c, d die Ausdrücke ergeben

$$(16.)\quad \begin{cases} a=\dfrac{\partial L}{\partial u}-\Sigma\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & b=\dfrac{\partial L}{\partial v}-\Sigma\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \\ b=\dfrac{\partial M}{\partial u}-\Sigma\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}, & c=\dfrac{\partial M}{\partial v}-\Sigma\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}, \\ c=\dfrac{\partial N}{\partial u}-\Sigma\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}, & d=\dfrac{\partial N}{\partial v}-\Sigma\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}. \end{cases}$$

Wendet man die *Weingarten*schen Formeln (11.) an und führt die bekannten *Gauss*schen Grössen $\Sigma\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}=m$ etc. ein [Disqu. art. 11, (4.) bis (9.)], so wird

$$(17.)\quad \begin{cases} a=\dfrac{\partial L}{\partial u}-\dfrac{1}{T^2}(\eta m+\vartheta n), \\ b=\dfrac{\partial L}{\partial v}-\dfrac{1}{T^2}(\eta' m+\vartheta' n)=\dfrac{\partial M}{\partial u}-\dfrac{1}{T^2}(\eta\, m'+\vartheta\, n'), \\ c=\dfrac{\partial M}{\partial v}-\dfrac{1}{T^2}(\eta' m'+\vartheta' n')=\dfrac{\partial N}{\partial u}-\dfrac{1}{T^2}(\eta m''+\vartheta n''), \\ d=\dfrac{\partial N}{\partial v}-\dfrac{1}{T^2}(\eta' m''+\vartheta' n''). \end{cases}$$

Die gesuchten Relationen werden nun unmittelbar aus der zweiten und dritten Gleichung erhalten, wenn man für η, ϑ, η', ϑ' ihre Werthe (12.) setzt und berücksichtigt, dass m, n, m', n', m'', n'' sich durch die Ableitungen der Fundamentalgrössen erster Ordnung ausdrücken lassen.

4.

Die von einem Kreise superosculirten Normalschnitte sind zuerst in einer Abhandlung von *de la Gournerie* [*Liouville*s Journal, T. 20 (1855), p. 145] bestimmt worden. Eine directe Transformation der dort angegebenen Resultate,

welche auf der Voraussetzung $z = f(x, y)$ beruhen, würde weitläufig sein; es ist daher die Entwickelung von vornherein der *Gauss*schen Flächendarstellung gemäss zu modificiren. Zur Abkürzung sei

$$\frac{du}{ds} = \sigma, \quad \frac{dv}{ds} = \tau$$

gesetzt, sodass nach (8.) ist

$$\frac{1}{\varrho} = L\sigma^2 + 2M\sigma\tau + N\tau^2.$$

Soll der durch $\frac{dv}{du}$ bestimmte Normalschnitt mit seinem Krümmungskreise eine Berührung höherer Ordnung haben, so muss

$$d\frac{1}{\varrho} = \sigma^2 dL + 2\sigma\tau dM + \tau^2 dN + 2[L\sigma d\sigma + M(\sigma d\tau + \tau d\sigma) + N\tau d\tau] = 0$$

sein, wo die Differentiale so zu nehmen sind, dass sie einem Fortschreiten auf ebendemselben Normalschnitt entsprechen. Hiernach ist

$$(18.) \qquad dL = \left(\frac{\partial L}{\partial u}\sigma + \frac{\partial L}{\partial v}\tau\right) ds, \quad \ldots,$$

und $d\sigma$, $d\tau$ sind aus den Gleichungen

$$(19.) \qquad \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\sigma + \frac{\partial x}{\partial v}\tau, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\partial y}{\partial u}\sigma + \frac{\partial y}{\partial v}\tau, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial u}\sigma + \frac{\partial z}{\partial v}\tau$$

durch Differentiation zu berechnen. Nun stellen die linken Seiten der letzteren die Richtungscosinus der Tangente des betrachteten Schnittes dar, und ihre Differentiale sind nach den *Frenet*schen Formeln für irgend eine Curve gleich den Richtungscosinus der Hauptnormale, multiplicirt mit dem Contingenzwinkel $d\varepsilon$. Im vorliegenden Fall fällt die Hauptnormale mit der Flächennormale zusammen. Ersetzt man noch $d\varepsilon$ durch $\frac{ds}{\varrho}$, so folgt

$$(20.) \qquad d\frac{dx}{ds} = X\frac{ds}{\varrho}, \quad d\frac{dy}{ds} = Y\frac{ds}{\varrho}, \quad d\frac{dz}{ds} = Z\frac{ds}{\varrho}.$$

Durch Differentiation von (19.) ergiebt sich jetzt

$$(21.) \qquad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}d\sigma + \frac{\partial x}{\partial v}d\tau = \left(\frac{X}{\varrho} - A\right) ds, \\ \frac{\partial y}{\partial u}d\sigma + \frac{\partial y}{\partial v}d\tau = \left(\frac{Y}{\varrho} - A'\right) ds, \\ \frac{\partial z}{\partial u}d\sigma + \frac{\partial z}{\partial v}d\tau = \left(\frac{Z}{\varrho} - A''\right) ds, \end{cases}$$

wo

$$A = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\sigma^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\sigma\tau + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\tau^2$$

gesetzt ist, und A', A'' aus A durch Vertauschung von x mit y und z hervorgehen. Die weitere Rechnung liefert

$$T^2 d\sigma = ds\Big(F\Sigma A\frac{\partial x}{\partial v} - G\Sigma A\frac{\partial x}{\partial u}\Big),$$

$$T^2 d\tau = ds\Big(-E\Sigma A\frac{\partial x}{\partial v} + F\Sigma A\frac{\partial x}{\partial u}\Big),$$

und mit Benutzung von (12.) und (11.):

$$Ld\sigma + Md\tau = ds\Sigma A\frac{\partial X}{\partial u},$$

$$Md\sigma + Nd\tau = ds\Sigma A\frac{\partial X}{\partial v}.$$

Substituirt man diese Werthe, sowie die von dL, dM, dN in $d\frac{1}{\varrho}$, nimmt für A, A', A'' ihre Ausdrücke, und setzt:

$$(22.)\quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u} + 2\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = L_1, & \frac{\partial L}{\partial v} + 2\Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = L_2, \\ \frac{\partial M}{\partial u} + 2\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = M_1, & \frac{\partial M}{\partial v} + 2\Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = M_2, \\ \frac{\partial N}{\partial u} + 2\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = N_1, & \frac{\partial N}{\partial v} + 2\Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = N_2, \end{cases}$$

so kommt:

$$ds^2 d\frac{1}{\varrho} = L_1 du^3 + (L_2 + 2M_1)du^2 dv + (N_1 + 2M_2)du\,dv^2 + N_2 dv^3.$$

Hierin werde noch

$$(23.)\quad L_1 = P,\quad L_2 + 2M_1 = 3Q,\quad N_1 + 2M_2 = 3R,\quad N_2 = S$$

gesetzt, wo P, Q, R, S als Fundamentalgrössen dritter Ordnung bezeichnet werden sollen; dann wird schliesslich

$$(24.)\quad ds^2 d\frac{1}{\varrho} = P du^3 + 3Q du^2 dv + 3R\,du dv^2 + S dv^3 = \mathrm{H},$$

und die Nullsetzung von H liefert für jeden Flächenpunkt einen oder drei reelle Normalschnitte, welche von ihrem Krümmungskreise superosculirt werden. — Für $u = x$, $v = y$ geht die entstehende Gleichung in diejenige über, welche *de la Gournerie* a. a. O. gegeben hat.

Für P, Q, R, S lassen sich andere Ausdrücke aufstellen, wenn man entweder die durch (15.) definirten Grössen a, b, c, d benutzt oder die Ableitungen von X, Y, Z wieder durch die Ableitungen der Coordinaten ersetzt und die *Gauss*schen Zeichen $m, \ldots n''$ einführt. Im ersten Fall wird

$$(25.)\quad \begin{cases} P = 3\dfrac{\partial L}{\partial u} - 2a, \\ Q = \dfrac{\partial L}{\partial v} + 2\dfrac{\partial M}{\partial u} - 2b, \\ R = \dfrac{\partial N}{\partial u} + 2\dfrac{\partial M}{\partial v} - 2c, \\ S = 3\dfrac{\partial N}{\partial v} - 2d, \end{cases}$$

im zweiten:

$$(26.)\quad \begin{cases} P = \dfrac{\partial L}{\partial u} + \dfrac{2}{T^2}(\eta\, m + \vartheta\, n), \\ Q = \dfrac{\partial L}{\partial v} + \dfrac{2}{T^2}(\eta\, m' + \vartheta\, n'), \\ R = \dfrac{\partial N}{\partial u} + \dfrac{2}{T^2}(\eta' m' + \vartheta' n'), \\ S = \dfrac{\partial N}{\partial v} + \dfrac{2}{T^2}(\eta' m'' + \vartheta' n''). \end{cases}$$

Die letzteren Formeln geben die Darstellung der Fundamentalgrössen dritter Ordnung durch die der ersten und zweiten Ordnung und ihre Ableitungen.

5.

Bei vielen flächentheoretischen Untersuchungen ist es vortheilhaft, an Stelle der Grössen $m, \ldots n''$ die Verbindungen $J_1, \ldots J_2''$ zu verwenden, welche durch die Gleichungen

$$(27.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{T^2}(Gm - Fn) = J_1, \quad \dfrac{1}{T^2}(En - Fm) = J_2, \\ \dfrac{1}{T^2}(Gm' - Fn') = J_1', \quad \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

oder

$$(28.)\quad \begin{cases} EJ_1 + FJ_2 = m, \quad FJ_1 + GJ_2 = n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

definirt werden. Führt man sie in (26.) ein und benutzt diese Gleichungen, sowie die beiden in (17.) enthaltenen Relationen zur Berechnung der Ableitungen von L, M, N, so ergiebt sich:

$$(29.)\quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u} = P+2(LJ_1+MJ_2), \quad \frac{\partial L}{\partial v} = Q+2(LJ_1'+MJ_2'), \\ \frac{\partial M}{\partial u} = Q+LJ_1'+M(J_2'+J_1)+NJ_2, \\ \frac{\partial M}{\partial v} = R+LJ_1''+M(J_2''+J_1')+NJ_2', \\ \frac{\partial N}{\partial u} = R+2(MJ_1'+NJ_2'), \quad \frac{\partial N}{\partial v} = S+2(MJ_1''+NJ_2''). \end{cases}$$

Bei dieser Schreibweise erkennt man, dass die Grössen P, Q, R, S durch eine, zuerst von Herrn *Christoffel* (dieses Journal Bd. 70, p. 57) angegebene Operation erhalten werden, wenn man dieselbe, in einer unmittelbar ersichtlichen Weise, auf ein simultanes System zweier Differentialformen ausdehnt. Hieraus ergiebt sich ferner die Verallgemeinerung jener Ausdrücke für den Fall, dass man es mit quadratischen Differentialformen von mehr als zwei Variablen zu thun hat.

Von Interesse sind noch die Beziehungen von $P, \ldots S$ zu den vier Ableitungen der Invarianten H und K. Man hat:

$$\begin{aligned} T^2\frac{\partial H}{\partial u} &= G\frac{\partial L}{\partial u}-2F\frac{\partial M}{\partial u}+E\frac{\partial N}{\partial u}+2(\eta J_1+\eta' J_2)+2(\vartheta J_1'+\vartheta' J_2'), \\ T^2\frac{\partial H}{\partial v} &= G\frac{\partial L}{\partial v}-2F\frac{\partial M}{\partial v}+E\frac{\partial N}{\partial v}+2(\eta J_1'+\eta' J_2')+2(\vartheta J_1''+\vartheta' J_2''), \\ T^2\frac{\partial K}{\partial u} &= N\frac{\partial L}{\partial u}-2M\frac{\partial M}{\partial u}+L\frac{\partial N}{\partial u}-2KT^2(J_1+J_2'), \\ T^2\frac{\partial K}{\partial v} &= N\frac{\partial L}{\partial v}-2M\frac{\partial M}{\partial v}+L\frac{\partial N}{\partial v}-2KT^2(J_1'+J_2''). \end{aligned}$$

Substituirt man in diese Gleichungen die Werthe (29.), so treten, wie man sogleich bemerkt, beträchtliche Reductionen ein, und die gesuchten Relationen ergeben sich in der bemerkenswerthen Form:

$$(30.)\quad \begin{cases} GP-2FQ+ER = T^2\frac{\partial H}{\partial u}, \\ GQ-2FR+ES = T^2\frac{\partial H}{\partial v}, \\ NP-2MQ+LR = T^2\frac{\partial K}{\partial u}, \\ NQ-2MR+LS = T^2\frac{\partial K}{\partial v}. \end{cases}$$

6.

Vom Standpunkte der Formentheorie kann man nach der flächentheoretischen Bedeutung der quadratischen Covariante der kubischen Form H fragen. Ihre Bedeutung in der Geometrie der Strahlbüschel oder Ebenenbüschel ist bekannt: die Covariante liefert, gleich Null gesetzt, die Doppelelemente der Involution, deren Grundelemente durch Nullsetzung von H gegeben werden. Sind die letzteren alle drei reell, so sind die Doppelelemente imaginär; sie sind reell, wenn nur eines jener drei Elemente reell ist.

Zu dem gesuchten flächentheoretischen Ausdruck gelangt man am einfachsten, wenn man das Product der Differentiale der Hauptkrümmungen als eine quadratische Differentialform darstellt und deren Coefficienten als Functionen der Fundamentalgrössen berechnet. Zunächst ergiebt sich aus der Bestimmungsgleichung der Hauptkrümmungen

$$\left(\frac{1}{\varrho_\varkappa}\right)^2 - H\frac{1}{\varrho_\varkappa} + K = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2):$$

$$(31.) \qquad (H^2-4K)\,d\frac{1}{\varrho_1}\,d\frac{1}{\varrho_2} = -dK^2 + HdHdK - KdH^2.$$

Hierin ist noch

$$dK = \frac{\partial K}{\partial u}\,du + \frac{\partial K}{\partial v}\,dv, \quad dH = \frac{\partial H}{\partial u}\,du + \frac{\partial H}{\partial v}\,dv$$

zu setzen, um die Differentialform zu erhalten, welche, gleich Null gesetzt, die Linien constanter Hauptkrümmungsradien liefert. Die Berechnung der Coefficienten ergiebt nun:

$$(32^a.) \qquad \begin{cases} -\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2 + H\frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial u} - K\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 \\ = \frac{1}{T^6}\{[\eta' P + (\vartheta'-\eta)Q - \vartheta R]^2 + [(\vartheta'-\eta)^2 + 4\vartheta\eta'](PR-Q^2)\}, \end{cases}$$

und durch Vertauschung von u mit v, bei welcher die beiden Grössenreihen

$$\eta, \quad \vartheta, \quad P, \quad Q$$
$$\vartheta', \quad \eta', \quad S, \quad R$$

in einander übergehen:

$$(32^b.) \qquad \begin{cases} -\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2 + H\frac{\partial K}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial v} - K\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2 \\ = \frac{1}{T^6}\{[\eta' Q + (\vartheta'-\eta)R - \vartheta S]^2 + [(\vartheta'-\eta)^2 + 4\vartheta\eta'](QS-R^2)\}. \end{cases}$$

Endlich ist:

$$(32^c.)\quad \begin{cases} -2\frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v}+H\left(\frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v}+\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v}\right)-2K\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v} \\ =\frac{1}{T^6}\{2[\eta' P+(\vartheta'-\eta)Q-\vartheta R][\eta' Q+(\vartheta'-\eta)R-\vartheta S] \\ \qquad +[(\vartheta'-\eta)^2+4\vartheta\eta'](PS-QR)\}. \end{cases}$$

Werden diese Werthe in (31.) eingesetzt und die Gleichung:

$$(\vartheta'-\eta)^2+4\vartheta\eta' = T^4(H^2-4K)$$

berücksichtigt, so folgt:

$$(33.)\quad \begin{cases} (H^2-4K)d\frac{1}{\varrho_1}d\frac{1}{\varrho_2} \\ =\frac{1}{T^6}\{[\eta' P+(\vartheta'-\eta)Q-\vartheta R]du+[\eta' Q+(\vartheta'-\eta)R-\vartheta S]dv\}^2 \\ +\frac{1}{T^2}(H^2-4K)[(PR-Q^2)du^2+(PS-QR)dudv+(QS-R^2)dv^2]. \end{cases}$$

7.

Um die quadratische Covariante

$$(34.)\quad V=\frac{1}{T^2}[(PR-Q^2)du^2+(PS-QR)dudv+(QS-R^2)dv^2]$$

durch geometrisch definirte Grössen und ihre Differentiale auszudrücken, hat man vermöge der letzteren Gleichung nur den Werth der linearen, simultanen Covariante von A, B und H:

$$(35.)\quad U=\frac{1}{T^3}\{[\eta' P+(\vartheta'-\eta)Q-\vartheta R]du+[\eta' Q+(\vartheta'-\eta)R-\vartheta S]dv\}$$

aufzusuchen. Nun ist nach (24.), (30.), (35.):

$$(36.)\quad \begin{cases} (Pdu+Qdv)du^2+2(Qdu+Rdv)dudv+(Rdu+Sdv)dv^2 = ds^2 d\frac{1}{\varrho}, \\ (Pdu+Qdv)G-2(Qdu+Rdv)F+(Rdu+Sdv)E = T^2 dH, \\ (Pdu+Qdv)N-2(Qdu+Rdv)M+(Rdu+Sdv)L = T^2 dK, \\ (Pdu+Qdv)\eta'+(Qdu+Rdv)(\vartheta'-\eta)-(Rdu+Sdv)\vartheta = T^3 U. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grössen $Pdu+Qdv$, $Qdu+Rdv$, $Rdu+Sdv$, so ergiebt sich eine Bestimmung für U. Bei der Entwickelung der entstehenden Determinante nach den Elementen der letzten Colonne werden die Formeln

$$(37.)\quad \begin{cases} 2F\vartheta - E(\vartheta' - \eta) &= T^2(HE - 2L), \\ E\eta' + G\vartheta &= T^2(HF - 2M), \\ 2F\eta' + G(\vartheta' - \eta) &= T^2(HG - 2N), \end{cases}$$

$$(38.)\quad \begin{cases} 2M\vartheta - L(\vartheta' - \eta) &= T^2(-HL + 2KE), \\ L\eta' + N\vartheta &= T^2(-HM + 2KF), \\ 2M\eta' + N(\vartheta' - \eta) &= T^2(-HN + 2KG), \end{cases}$$

sowie die Gleichungen (3.), (8.) und (13.) gebraucht; dann ergiebt sich

$$(H^2 - 4K)\,ds^2\,d\frac{1}{\varrho} + \left(2K - \frac{H}{\varrho}\right)ds^2\,dH - \left(H - \frac{2}{\varrho}\right)ds^2\,dK + 2\Gamma U = 0.$$

Setzt man noch

$$\frac{1}{\varrho} = r, \quad \frac{1}{\varrho_1} = r_1, \quad \frac{1}{\varrho_2} = r_2,$$

also

$$H = r_1 + r_2, \quad K = r_1 r_2, \quad H^2 - 4K = (r_1 - r_2)^2,$$

und substituirt den Werth von U, mit Benutzung von (14.), in die Gleichung (33.):

$$(r_1 - r_2)^2 V = (r_1 - r_2)^2 dr_1 dr_2 - U^2,$$

so folgt die gesuchte Formel:

$$(39.)\quad \begin{cases} V = \dfrac{1}{4(r_1 - r)(r - r_2)} \{4(r_1 - r)(r - r_2)\,dr_1 dr_2 \\ \qquad\qquad - [(r - r_2)\,dr_1 + (r_1 - r)\,dr_2 + (r_2 - r_1)\,dr]^2\}. \end{cases}$$

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass derselbe Werth auch auf directem Wege hätte erhalten werden können, nämlich durch Zusammenstellung der drei ersten Gleichungen (36.) mit dem Ausdruck der Covariante

$$V = \frac{1}{T^2}\begin{vmatrix} P\,du + Q\,dv, & Q\,du + R\,dv \\ Q\,du + R\,dv, & R\,du + S\,dv \end{vmatrix}.$$

Bemerkt sei noch, dass auf den *Weingarten*schen Flächen die Curven $V = 0$ gegen die Krümmungslinien gleich geneigt sind. Denn für

$$\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v} - \frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v} = 0$$

folgt aus (30.):

$$2\eta'(PR - Q^2) + (\vartheta' - \eta)(PS - QR) - 2\vartheta(QS - R^2) = 0.$$

Dies ist aber, in Verbindung mit der Orthogonalität der Krümmungslinien, die Bedingung dafür, dass die letzteren die Winkel der in Rede stehenden Curven halbiren.

Berlin, Juli 1887.

Ueber die Bedingung für die Isometrie der Krümmungscurven.

(Von Herrn *J. Knoblauch.*)

Der analytische Ausdruck für die Eigenschaft einer Fläche, durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt zu werden, ist bekanntlich von Herrn *Weingarten* in Form einer Integrabilitätsbedingung gegeben worden *). Die Frage, ob eine Fläche, deren Gleichungen man kennt, jene Eigenschaft besitze, ist hiernach als gelöst zu betrachten, insofern ihre Entscheidung nur von Differentiationen abhängt. Vom geometrischen Gesichtspunkte aus kann man jedoch noch nach der Bedeutung derjenigen linearen Differentialform fragen, welche der Bedingung der Integrabilität zu genügen hat. Herr *Weingarten* selbst hat für den von ihm gefundenen Werth eine geometrische Darstellung geliefert **). Doch kommen in dieser noch Grössen vor, welche von dem gewählten Axensystem abhängen, während es, der Natur des betrachteten Ausdrucks gemäss, möglich sein muss, ihn so umzuwandeln, dass er von derartigen Grössen auch äusserlich frei ist. Zu einer Transformation, welche dieser Forderung genügt, gelangt man in folgender Weise.

Es seien E, F, G, m, ... n'' die bekannten *Gauss*schen Grössen, $T=\sqrt{EG-F^2}$ (die Quadratwurzel positiv genommen), J_1, J_2, ... die Verbindungen

$$\frac{1}{T^2}(Gm-Fn), \quad \frac{1}{T^2}(En-Fm), \quad \ldots,$$

L, M, N die durch T dividirten *Gauss*schen Fundamentalgrössen zweiter Ordnung. Der *Weingarten*sche Differentialausdruck ist

$$(1.) \quad \Omega = \frac{1}{H^2-4K}\{[e_{11}e_a(u)+e_{12}e_a(v)]du+[e_{12}e_a(u)+e_{22}e_a(v)]dv\},$$

*) Festschrift der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin, 1884.

**) Monatsberichte der Berliner Akademie, 1883.

worin H und K die Summe und das Product der Hauptkrümmungen, die Grössen e_{ik} die Coefficienten derjenigen quadratischen Differentialform I' bedeuten, welche, gleich Null gesetzt, die Krümmungscurven liefert. Wählt man diejenigen Bezeichnungen, welche in der vorhergehenden Abhandlung *) angewandt worden sind, so ist zu setzen:

$$(2.)\quad \begin{cases} e_{11} = -\dfrac{\vartheta}{T} = -\dfrac{FL-EM}{T}, \quad e_{22} = \dfrac{\eta'}{T} = \dfrac{FN-GM}{T}, \\ e_{12} = -\frac{1}{2}\dfrac{\vartheta'-\eta}{T} = -\frac{1}{2}\dfrac{GL-EN}{T}, \end{cases}$$

$$(3.)\quad \begin{cases} e_a(u) = \dfrac{1}{T}\Big[\dfrac{\partial\frac{\eta'}{T^2}}{\partial u} + \frac{1}{2}\dfrac{\partial\frac{\vartheta'-\eta}{T^2}}{\partial v} - \dfrac{\vartheta}{T^2}J_1'' + \dfrac{\vartheta'-\eta}{T^2}J_1' + \dfrac{\eta'}{T^2}J_1\Big], \\ e_a(v) = \dfrac{1}{T}\Big[-\dfrac{\partial\frac{\vartheta}{T^2}}{\partial v} + \frac{1}{2}\dfrac{\partial\frac{\vartheta'-\eta}{T^2}}{\partial u} - \dfrac{\vartheta}{T^2}J_2'' + \dfrac{\vartheta'-\eta}{T^2}J_2' + \dfrac{\eta'}{T^2}J_2\Big]. \end{cases}$$

Bei Ausführung der Differentiationen ist es zweckmässig, die a. a. O. definirten Grössen P, Q, R, S einzuführen, deren Zusammenhang mit den Ableitungen von L, M, N durch die Gleichungen

$$(4.)\quad \begin{cases} P = \dfrac{\partial L}{\partial u} - 2(LJ_1 + MJ_2), \\ Q = \dfrac{\partial L}{\partial v} - 2(LJ_1' + MJ_2') = \dfrac{\partial M}{\partial u} - (LJ_1' + MJ_2') - (MJ_1 + NJ_2) \end{cases}$$

und die analogen vermittelt wird. Man erhält dann

$$\frac{\partial\frac{\eta'}{T^2}}{\partial u} = \frac{1}{T^2}[FR - GQ - \eta'(J_1 - J_2') - (\vartheta' - \eta)J_1'],$$

$$\frac{\partial\frac{\vartheta'-\eta}{T^2}}{\partial v} = \frac{1}{T^2}[GQ - ES + 2\vartheta J_1'' - 2\eta' J_2'].$$

Setzt man diese Werthe in (3.) ein, benutzt die Formel (a. a. O. (30.))

$$GQ - 2FR + ES = T^2\frac{\partial H}{\partial v}$$

und beachtet endlich, dass $e_a(v)$ aus $e_a(u)$ durch Vertauschung von u mit v und Aenderung des Vorzeichens hervorgeht, so folgt:

$$(5.)\qquad e_a(u) = -\frac{1}{2T}\frac{\partial H}{\partial v}, \quad e_a(v) = \frac{1}{2T}\frac{\partial H}{\partial u},$$

*) Seite 25 dieses Bandes.

mithin

$$(6.)\quad \begin{cases} \Omega = \dfrac{-1}{4T(H^2-4K)}\Big\{\dfrac{1}{T}[-2\vartheta\,du-(\vartheta'-\eta)dv]\dfrac{\partial H}{\partial v} \\ \qquad\qquad -\dfrac{1}{T}[-(\vartheta'-\eta)du+2\eta'\,dv]\dfrac{\partial H}{\partial u}\Big\}. \end{cases}$$

Bei dieser Schreibweise erscheint die Grösse in der Klammer als die, in Bezug auf die Differentiale du, dv genommene Functionaldeterminante $D(I, dH)$ der quadratischen Form

$$I = \frac{1}{T}[-\vartheta\,du^2-(\vartheta'-\eta)\,du\,dv+\eta'\,dv^2]$$

und der linearen Form

$$dH = \frac{\partial H}{\partial u}\,du+\frac{\partial H}{\partial v}\,dv.$$

An Stelle der Functionaldeterminante kann ein Doppelverhältniss eingeführt werden. Bezeichnen nämlich λ_1 und λ_2 die beiden Werthe von $\frac{dv}{du}$, welche den Haupttangenten in einem gegebenen Flächenpunkte entsprechen, bezieht sich ferner der Werth μ auf die Tangente der, durch denselben Punkt gehenden Linie $H=\text{const.}$, λ auf eine beliebige Tangente, und ist n das Doppelverhältniss der vier Strahlen (die beiden letzteren einander zugeordnet), so hat man

$$\frac{1+n}{1-n} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)(\mu+\lambda)-2(\lambda_1\lambda_2+\mu\lambda)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\mu-\lambda)}.$$

Werden hierin für λ_1 und λ_2 die aus $I=0$ folgenden Werthe gesetzt, $\mu = -\dfrac{\frac{\partial H}{\partial u}}{\frac{\partial H}{\partial v}}$ genommen, und mit dH das Increment von H bezeichnet, welches einem Fortgange in der beliebig gewählten Richtung entspricht, so ergiebt sich

$$(7.)\quad \frac{1+n}{1-n} = \frac{D(I, dH)}{\pm T\,dH\sqrt{H^2-4K}}.$$

Die Differentialform, auf deren Integrabilität es ankommt, hat hiernach den Ausdruck

$$(8.)\quad \frac{1+n}{1-n}\,\frac{dH}{\sqrt{H^2-4K}}.$$

Derselbe verliert seine Bedeutung für $n=1$, eine Gleichung, welche ver-

möge (7.) und wegen $T > 0$, $H^2 - 4K > 0$ nur dann stattfinden kann, wenn für die ganze Oberfläche

$$H = \text{const.}$$

ist. Von den Flächen constanter mittlerer Krümmung (nebst den Minimalflächen) ist aber bekannt (und aus der Gleichung (6.) von neuem zu schliessen), dass sie der betrachteten Klasse angehören. Man beweist ohne Schwierigkeit, dass ausser den Rotationsflächen die von constanter mittlerer Krümmung die einzigen *Weingarten*schen Flächen sind, für welche die Krümmungslinien ein System isometrischer Curven bilden.

Logau, August 1887.

Anwendung der *Abel*schen Functionen auf ein Problem der Statik biegsamer, unausdehnbarer Flächen.

(Von Herrn *Fritz Kötter*.)

Durch Abhandlungen der Herren *Lecornu* *) und *Beltrami* **) ist in neuerer Zeit die Bearbeitung einer Frage in Angriff genommen, welche in naher Beziehung zu dem Kettenlinienproblem steht; es wird in den erwähnten Schriften untersucht, unter welchen Umständen ein aus einem biegsamen unausdehnbaren Material gefertigtes Stück einer gegebenen Fläche, auf welches gegebene Kräfte wirken, sich im Gleichgewicht befindet.

Es ergeben sich bei dieser Untersuchung für die drei Componenten der auf ein Element wirkenden Kräfte Ausdrücke, in welchen neben den Gestaltungs- und Lageelementen der zu untersuchenden Fläche drei Grössen auftreten, von denen die anderweitig nicht bestimmten Componenten der Spannung abhängen; neben diesen für jeden Punkt der Fläche geltenden Gleichungen erhält man drei Gleichungen für jeden Punkt des Randes, durch welche die auf den letzteren wirkenden Kräfte bestimmt werden. Aus diesen Relationen haben die Herren *Lecornu* und *Beltrami* eine grosse Reihe interessanter Gesetze abgeleitet, welche sich auf specielle Gattungen von Flächen und Kraftsystemen beziehen.

Die erwähnten Gleichungen bilden den natürlichen Ausgangspunkt für die Beantwortung einer Frage, welche das eigentliche Analogon zu dem Kettenlinienproblem bildet, nämlich der Frage: In welche Lage muss ein gegebenes Stück einer biegsamen unausdehnbaren Fläche gebracht werden, damit es unter Einfluss gegebener Kräfte im Gleichgewicht sei?

Nur gelegentlich wird diese Frage von Herrn *Lecornu* auf Seite 61 und 74 seiner Abhandlung gestreift. In der That dürfte der Versuch einer

*) Journal de l'École Polytechn. Tome XXIX, Cah. XLVIII.

**) Mem. dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Serie IV, Tomo III.

allgemeinen Lösung des in Frage stehenden Problems bei dem jetzigen Stande der Mathematik ziemlich aussichtslos sein. Für einen speciellen Fall hat der Verfasser der vorliegenden Abhandlung, ohne die erwähnten Schriften zu kennen, die Lösung der Aufgabe in Angriff genommen, indem er folgendes Problem einer näheren Betrachtung unterzog *).

Es ist ein aus einem biegsamen, unausdehnbaren, homogenen Material gefertigtes Stück einer Ebene gegeben, welches von zwei geraden Strecken AB und CD und zwei deren Endpunkte verbindenden krummen Linien AC und BD begrenzt ist. Mit den begrenzenden Geraden wird dieses Gebilde, welches wir der Kürze halber Tuch nennen, in zwei Geraden AB und $\Gamma\Delta$ befestigt. Von all den Lagen, in welche das Gebilde dann noch gebracht werden kann, soll diejenige bestimmt werden, in welcher es unter Einfluss der Schwere unveränderlich verharren kann.

Aus der Bedingung der Biegsamkeit und Unausdehnbarkeit folgt, dass das gesuchte Gleichgewichtsgebilde ein Stück einer abwickelbaren Fläche ist, d. h. des geometrischen Ortes der Geraden, welche eine gewisse Curve doppelter Krümmung berühren. Durch zwei auf einander folgende erzeugende Gerade dieser Fläche wird nun aus dem Flächenstück ein Elementarstreifen ausgeschnitten, welcher einen gewissen Schwerpunkt haben wird; der Ort desselben soll die Schwerpunktscurve des fraglichen Flächenstückes heissen. Ueber diese Curve denken wir uns einen biegsamen unausdehnbaren Faden gespannt und in den auf AB resp. $\Gamma\Delta$ liegenden Enden der Schwerpunktscurve befestigt; die in einem Element ds dieses Fadens vereinigte Masse soll gleich derjenigen des zugehörigen Flächenstreifens sein. Diesen Faden nennen wir den zugeordneten Schwerpunktsfaden des betreffenden Flächenstückes. Das Kriterium der Gleichgewichtslage des gegebenen Gebildes ist nun die Eigenschaft, dass ihre Schwerpunktscurve eine Gleichgewichtslage des zugeordneten Schwerpunktsfadens ist. Aus diesem Theorem ergiebt sich zunächst für die ebene Curve, in welche die Gratcurve der gesuchten Fläche bei der Abwickelung übergeht, eine Differentialgleichung, nach deren Integration man die Gratcurve und damit die gesuchte Fläche selbst ohne weiteres erhält. Der angegebene Satz ist nicht so selbstverständlich, als man vielleicht aus dem Umstande zu schliessen

*) Ueber das Gleichgewicht biegsamer unausdehnbarer Flächen. Diss. Halle 1883. Commissionsverlag von Mayer & Müller, Berlin.

geneigt wäre, dass der Schwerpunkt eines abwickelbaren Flächenstückes und seines über die Schwerpunktscurve gespannten Schwerpunktsfadens zusammenfallen müssen, da nur denjenigen Lagen des gegebenen Gebildes derselbe Schwerpunktsfaden zugehört, deren Gratcurve bei der Abwickelung auf $ABCD$ in dieselbe ebene Curve übergeht; es handelt sich also nicht um einen einzelnen, sondern um unendlich viele Fäden.

Das Gesagte erleidet eine Ausnahme, wenn, wie im Folgenden angenommen werden soll, die beiden Punkte A und C in einen Punkt O zusammenfallen; dann müssen selbstverständlich die Punkte A und I' in einem Punkte O' vereinigt sein. Die gesuchte abwickelbare Fläche wird eine Kegelfläche, deren Erzeugende bei der Abwickelung auf BOD in gerade Linien übergehen, welche sich im Punkte O schneiden. Hier geht also die Schwerpunktscurve jeder beliebigen Lage in eine ganz bestimmte ebene Curve über, und es giebt nur einen einzigen Schwerpunktsfaden. Spannen wir nun nach einander diesen Faden über die Schwerpunktscurven verschiedener möglicher Lagen des Gebildes, so behält ein bestimmter Punkt des Fadens stets eine bestimmte Entfernung vom Punkte O'; das oben erwähnte Theorem ist dann dahin zu modificiren:

dass die Schwerpunktscurve einer Gleichgewichtslage identisch ist mit derjenigen Gleichgewichtslage des Schwerpunktsfadens, welche sich ergiebt, wenn jeder Punkt des letzteren gezwungen ist, auf einer bestimmten um O' beschriebenen Kugel zu bleiben, deren Radius — abgesehen von dem Falle, dass die Curve BD ein Kreis ist — von Punkt zu Punkt variirt.

Es seien jetzt ψ_1, ψ_2 und ψ die Cosinus der Winkel, welche eine der Erzeugenden der gesuchten Kegelfläche mit den Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems bildet, dessen Anfangspunkt O' ist, und φ sei der Winkel, welchen die entsprechende Gerade in der Ebene mit der Abscissenaxe eines Coordinatensystems bildet, dessen Anfangspunkt in O liegt; dann haben zwei entsprechende Punkte die Coordinaten

$$\xi = \varrho\psi_1, \quad \eta = \varrho\psi_2, \quad \zeta = \varrho\psi$$

und

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi,$$

wobei ϱ die Entfernung der fraglichen Punkte von O' und O bezeichnet. Die Grössen ψ_1, ψ_2 und ψ sind Functionen von φ, welche den Gleichungen

$$(1^a.) \qquad \psi_1^2+\psi_2^2+\psi^2 = 1$$

und

$$(1^b.) \quad \left(\frac{d\psi_1}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{d\psi_2}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 = 1$$

genügen. Für eine Gleichgewichtslage ist dann, vorausgesetzt dass die ζ-Axe die Richtung der Schwere hat,

$$(2.) \quad A\frac{\psi+\psi''}{\sqrt{(1-\psi^2-\psi'^2)^3}} = \varrho_1^3;$$

dabei ist A eine vorläufig noch unbekannte Constante; ϱ_1 ist der zu φ gehörende Radiusvector der Curve BD, also eine gegebene Function dieser Grösse; ferner ist

$$\psi_1 = \sqrt{1-\psi^2}\cos\vartheta, \quad \psi_2 = \sqrt{1-\psi^2}\sin\vartheta,$$

wenn

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}{1-\psi^2}$$

ist.

Was nun die Integration der Differentialgleichung (2.) betrifft, so ist dieselbe bekanntlich, da es sich hier um ein Problem der Variationsrechnung handelt, auf eine blosse Quadratur zurückgeführt, sobald ein Integral derselben

$$(3.) \quad F(\psi', \psi, \varphi) = C'$$

bekannt ist. Der integrirende Factor der noch zu lösenden Differentialgleichung:

$$d\psi - \psi' d\varphi = 0,$$

wo ψ' aus (3.) als Function von ψ und φ zu berechnen ist, ergiebt sich dann als ein Ausdruck von der Form M: $\frac{\partial F}{\partial \psi'}$, in welchem M durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{d\varphi} = -\frac{\partial\psi''}{\partial\psi'} = \frac{3\varrho_1^3}{A}\psi'\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2},$$

welche, wenn rechts $\frac{\varrho_1^3}{A}$ durch seinen Werth aus der Gleichung (2.) ersetzt wird, übergeht in:

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{d\varphi} = 3\frac{\psi'(\psi+\psi'')}{(1-\psi^2-\psi'^2)};$$

es darf also

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1-\psi^2-\psi'^2)^3}}$$

gesetzt werden. Nach Auffindung des durch (3.) gegebenen ersten Integrals ist demnach nur noch das vollständige Differential

$$(4.) \qquad \frac{d\psi - \psi' d\varphi}{\frac{\partial F}{\partial \psi'}\sqrt{(1-\psi^2-\psi'^2)^3}} = 0$$

zu integriren, wenn wir zur Lösung der Differentialgleichung (2.) gelangen wollen.

In meiner oben erwähnten Dissertation habe ich die Differentialgleichung (2.) für zwei ganz specielle Fälle integrirt, nämlich für den Fall eines Kreises mit dem Mittelpunkt O und für den Fall einer geraden Linie; beide führen auf elliptische Functionen, und zwar lassen sich in ihnen die Coordinaten der Randpunkte durch Thetafunctionen eines Argumentes darstellen, welches durch die Gleichung

$$(5.) \qquad du = \tfrac{1}{2}\varrho_1^2(1-\psi^2)d\vartheta$$

bis auf eine additive Constante bestimmt ist; geometrisch kann man u definiren als die Projection auf eine horizontale Ebene desjenigen Stückes der gesuchten Gleichgewichtsfläche, welches zwischen einer festen und einer beweglichen Erzeugenden liegt.

Im Folgenden soll die Differentialgleichung (2.) integrirt werden für den Fall eines beliebigen Kegelschnittes mit dem Centrum O, also für einen Fall, welcher die bisher untersuchten speciellen Fälle umschliesst; wir werden sehen, dass sich auch in dem allgemeineren Falle die Randcoordinaten in einfacher Weise durch den vorerwähnten Parameter u darstellen lassen.

In den beiden erwähnten speciellen Fällen ergab sich das erste Integral der Differentialgleichung (2.) sehr leicht in Folge des Umstandes, dass sich eine Function U der Grössen ψ und φ bestimmen liess, deren mit $\frac{1}{\varrho_1^3}$ multiplicirte totale Ableitung nach φ die linke Seite der Gleichung (2.) in den vollständigen Differentialquotienten einer Function V von ψ', ψ und φ verwandelte, wenn sie derselben als Factor hinzugefügt wurde; damit war dann unmittelbar das erste Integral geliefert. Leider sind die genannten Fälle die einzigen, in welchen das angedeutete Verfahren sich anwenden lässt, und daher sind wir gezwungen zur Lösung des allgemeineren Problems einen anderen Weg einzuschlagen.

Wir führen an Stelle der unabhängigen Veränderlichen eine Grösse

f ein, welche der Gleichung

$$(6.) \qquad df = \varrho_1^2 d\varphi$$

genügt und für ein gewisses φ einen beliebigen vorgeschriebenen Werth annimmt; da ϱ_1 eine gegebene Function von φ ist, kann es auch als eine gegebene Function von f betrachtet werden; als abhängige Veränderliche führen wir

$$(7.) \qquad v = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}$$

ein. Dann ist

$$(8.) \qquad \frac{dv}{df} = \frac{\sqrt{A}\psi'(\psi+\psi'')}{\varrho_1^2\sqrt{(1-\psi^2-\psi'^2)^3}} = \frac{\varrho_1\psi'}{\sqrt{A}}$$

und

$$\frac{d^2v}{df^2} = \frac{1}{\varrho_1}\frac{\psi''}{\sqrt{A}} + \frac{\psi'}{\sqrt{A}}\frac{d\varrho_1}{df},$$

oder, wenn die Gleichungen (2.), (7.) und (8.) benutzt werden:

$$(9.) \qquad \frac{d^2v}{df^2} - \frac{1}{\varrho_1}\frac{dv}{df}\cdot\frac{d\varrho_1}{df} - \frac{\varrho_1^2}{v^3} = -\frac{\psi}{\sqrt{A}\varrho_1}.$$

Eliminirt man nun aus (7.), (8.) und (9.) die Grössen ψ und ψ', so erhält man folgende Differentialgleichung:

$$(10.) \qquad \varrho_1^2\left\{\frac{d^2v}{df^2} - \frac{1}{\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{df}\frac{dv}{df} - \frac{\varrho_1^2}{v^3}\right\}^2 + \left(\frac{dv}{df}\right)^2\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{A}.$$

Statt direct ein Integral der Gleichung (10.) zu suchen, betrachten wir die Differentialgleichung dritter Ordnung, welche wir erhalten, indem wir den vorstehenden Ausdruck differentiiren. Erstens machen wir uns dadurch von dem Werth der Constanten A unabhängig, zweitens lässt sich die linke Seite der Gleichung (9.) als Factor absondern; da nun der letztgenannte Ausdruck, abgesehen von dem nicht in Betracht zu ziehenden Fall, dass die Gleichgewichtslage in einer horizontalen Ebene besteht, nicht identisch verschwinden kann, so erhalten wir die folgende einfache Differentialgleichung:

$$(11.) \qquad \varrho_1\frac{d^3v}{df^3} - \frac{dv}{df}\left(\frac{d^2\varrho_1}{df^2} - \frac{1}{\varrho_1^3}\right) - \frac{d}{df}\left(\frac{\varrho_1^3}{v^3}\right) = 0.$$

Nach unserer Voraussetzung sollte nun die Curve BD ein Kegelschnitt sein, dessen Mittelpunkt in O liegt; bei passender Wahl des Coordinaten-

systems in der xy-Ebene kann also

$$(12.) \qquad \frac{1}{\varrho_1^2} = \Phi^2 = \varkappa \cos^2\varphi + \lambda \sin^2\varphi$$

gesetzt werden, wo $\varkappa$ und λ constante Grössen bezeichnen. Differentiiren wir Gleichung (12.) nach φ und quadriren dann, so ergiebt sich

$$(13.) \qquad \Phi^2 \Phi'^2 = -(\Phi^2 - \varkappa)(\Phi^2 - \lambda),$$

oder nach Einführung von ϱ_1 und f

$$(14.) \qquad \left(\frac{d\varrho_1}{df}\right)^2 = -\frac{1}{\varrho_1^2} + (\varkappa + \lambda) - \varkappa\lambda\varrho_1^2,$$

und nach nochmaliger Differentiation

$$(15.) \qquad \frac{d^2\varrho_1}{df^2} = +\frac{1}{\varrho_1^3} - \varkappa\lambda\varrho_1.$$

Die allgemeingültige Differentialgleichung (11.) geht also in dem speciellen Falle eines Kegelschnittes mit dem Mittelpunkt O über in:

$$(11^a.) \qquad \frac{d^3v}{df^3} + \frac{dv}{df}\varkappa\lambda - \frac{1}{\varrho_1}\frac{d}{df}\left(\frac{\varrho_1^3}{v^3}\right) = 0.$$

Ein von (10.) verschiedenes Integral dieser Gleichung ist unmittelbar zu finden; multipliciren wir nämlich mit $2v$, so erhalten wir eine Gleichung, deren linke Seite folgendermassen als totaler Differentialquotient geschrieben werden kann:

$$\frac{d}{df}\left(2v\frac{d^2v}{df^2} - \left(\frac{dv}{df}\right)^2 + \varkappa\lambda v^2 - 3\frac{\varrho_1^2}{v^2}\right),$$

und damit das folgende Integral von $(11^a.)$:

$$(16.) \qquad 2v\frac{d^2v}{df^2} - \left(\frac{dv}{df}\right)^2 + \varkappa\lambda v^2 - 3\frac{\varrho_1^2}{v^2} = C.$$

Indem man nun für v und seine Ableitungen nach f die durch die Gleichungen (7.)—(9.) gelieferten Werthe einsetzt, erhält man in dem hier behandelten speciellen Falle das folgende Integral für die Differentialgleichung (2.):

$$(3^a.) \qquad F(\psi', \psi, \varphi) = \frac{A^2\varkappa\lambda}{1-\psi^2-\psi'^2} - 2A\frac{\psi\Phi + \psi'\Phi'}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}} - \frac{1-\psi^2}{\Phi^2} = C' = CA.$$

Die Gleichung (4.) giebt, wenn der vorstehende Ausdruck für $F(\psi', \psi, \varphi)$ benutzt wird, das zweite Integral der Gleichung (2.) und damit ψ als Function von φ; die Bestimmung von ϑ aus der Gleichung

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}{1-\psi^2}\,d\varphi$$

erfordert dann nur noch eine Quadratur. Statt nun aber die Function ψ von φ in den vorstehenden Ausdruck einzusetzen und dann zu integriren, wollen wir denselben zunächst in das vollständige Differential einer Function von ψ und φ verwandeln und dann erst die Quadratur ausführen. Es sei

$$U d\varphi + V d\psi$$

die gesuchte Darstellung von $d\vartheta$ als vollständiges Differential, sodass also die Identität gilt:

$$U d\varphi + V d\psi = \frac{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}{1-\psi^2} d\varphi + Q \cdot \frac{d\psi - \psi' d\varphi}{\frac{\partial F}{\partial \psi'} \sqrt{(1-\psi^2-\psi'^2)^3}},$$

in welcher Q eine gewisse Function von ψ und φ ist. Dieselbe genügt, da ihr Coefficient ein vollständiges Differential ist, der Bedingung:

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = -\frac{\partial Q}{\partial \psi}\psi' + \left(\frac{\partial t}{\partial \psi} + \frac{\partial t}{\partial \psi'}\frac{\partial \psi'}{\partial \psi}\right)\frac{\partial F}{\partial \psi'}\sqrt{(1-\psi^2-\psi'^2)^3},$$

in welcher t zur Abkürzung für $\frac{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}{1-\psi^2}$ geschrieben ist.

Aus derselben folgt

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{d\varphi} &= \left(\frac{\partial t}{\partial \psi}\frac{\partial F}{\partial \psi'} - \frac{\partial t}{\partial \psi'}\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)\sqrt{(1-\psi^2-\psi'^2)^3} \\ &= 2A\left\{2Az\lambda\frac{\psi\psi'}{(1-\psi^2)^2} - 2\frac{\psi^2\psi'\Phi}{(1-\psi^2)^2}\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\right. \\ &\qquad \left. - \frac{\psi'\Phi+\psi\Phi'}{(1-\psi^2)}\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2} + \frac{\psi\psi'}{\Phi^2 A}(1-\psi^2-\psi'^2)\right\}.\end{aligned}$$

Das letzte Glied in der Klammer des rechts stehenden Ausdrucks transformiren wir nun, indem wir für $\frac{1}{A}$ den Werth

$$\Phi^3 \frac{\psi+\psi''}{\sqrt{(1-\psi^2-\psi'^2)^3}}$$

einsetzen, welcher sich aus Gleichung (1.) ergiebt; dadurch erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{dQ}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{2A}{1-\psi^2}\left(Az\lambda - \psi\Phi\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\right)\right\}.$$

Bezeichnen wir die Function von ψ und φ, deren Differential auf der linken Seite der Gleichung (4.) steht, mit ω, so können wir demnach $d\vartheta$ in fol-

gender Weise als vollständiges Differential schreiben:

$$(17.) \quad d\vartheta = \frac{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}{1-\psi^2}d\varphi + \frac{2A}{1-\psi^2}(Az\lambda - \psi\Phi\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2})d\omega.$$

Es handelt sich jetzt darum, den Inhalt der Gleichung $(3^a.)$

$$d\omega = 0$$

zu deuten, d. h. zusammengehörige Werthepaare (ψ, φ) als einfache Functionen eines Parameters darzustellen. Wir werden sehen, dass sich diese Darstellung besonders einfach gestaltet, wenn wir diejenige Grösse zu Grunde legen, welche sich in den beiden vorerwähnten speciellen Fällen fast von selbst darbot, d. h. die Grösse, welche der Differentialgleichung

$$2du = \varrho_1^2(1-\psi^2)d\vartheta = \varrho_1^2\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\,d\varphi$$

genügt und für ein specielles φ einen beliebigen vorgegebenen Werth annimmt. Zunächst werden wir $2du$ als vollständiges Differential einer Function von ψ und φ darstellen; wir erreichen das, wenn wir

$$2du = \varrho_1^2\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\,d\varphi + Q'd\omega$$

setzen und dann — ähnlich wie bei $d\vartheta$ — Q' aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{dQ'}{d\varphi} &= 2A\left\{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\,\frac{\psi\Phi'-\psi'\Phi}{\Phi^2} + \frac{2\psi\psi'(1-\psi^2-\psi'^2)}{\Phi^4 A}\right\}\\ &= 2A\left\{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\,\frac{\psi\Phi'-\psi'\Phi}{\Phi^2} + \frac{2\psi\psi'(\psi+\psi'')}{\Phi\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}\right\}\\ &= -2A\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\psi}{\Phi}\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\right)\end{aligned}$$

bestimmen; wir erhalten als Resultat dieser Operationen folgende Darstellung von $2du$ in Gestalt eines vollständigen Differentials:

$$(18.) \quad 2du = \varrho_1^2\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}\,d\varphi - 2A\varrho_1\psi\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}d\omega.$$

Selbstverständlich gilt die Eigenschaft der Grösse $d\omega$ und der in (17.) und (18.) gegebenen Ausdrücke für $d\vartheta$ und du, vollständige Integrale zu sein, nur im Zusammenhang mit der Gleichung $(3^a.)$, d. h. wenn man ψ' aus der letzteren berechnet und dann in die erwähnten Ausdrücke einsetzt. Etwas bequemer wird diese Operation, wenn wir dieselbe nicht direct ausführen, sondern statt ψ' eine andere Grösse

$$(19.) \quad t = \frac{A}{\sqrt{1-\psi^2-\psi'^2}}$$

einführen, welche mit ψ' in einem mit Rücksicht auf (3ª.) in gewissem Sinne eindeutig umkehrbaren Zusammenhange steht und welche der Gleichung genügt:

$$(20.)\qquad F_1(t) \equiv \Big\{t^2 - \frac{2}{\varkappa\lambda}\psi\Phi t - \frac{1}{\varkappa\lambda}\Big(C' + \frac{1-\psi^2}{\Phi^2}\Big)\Big\}^2 - \frac{4}{\varkappa^2\lambda^2}\Phi'^2\big((1-\psi^2)t^2 - A^2\big) = 0.$$

Dies ergiebt uns die Formeln:

$$(21.)\qquad d\omega \equiv \frac{1}{A\varkappa\lambda\dfrac{\partial F_1}{\partial t}}\Big\{\frac{4t\Phi'}{\varkappa\lambda}\,d\psi - 2\Big[t^2 - 2\,\frac{\psi\Phi}{\varkappa\lambda}\,t - \frac{1}{\varkappa\lambda}\Big(C' + \frac{1-\psi^2}{\Phi^2}\Big)\Big]d\varphi\Big\} = 0,$$

$$(22.)\qquad 2\,du \equiv \frac{A\,d\varphi}{\Phi^2 t} - 2\,\frac{A^2\psi}{\Phi t}\,d\omega,$$

$$(23.)\qquad d\vartheta \equiv 2\,\frac{\Phi^2}{1-\psi^2}\,du + 2\,\frac{A^2\varkappa\lambda}{1-\psi^2}\,d\omega.$$

Die rechts stehenden Ausdrücke, welche sämmtlich die Form $\mathfrak{U}\,d\varphi + \mathfrak{V}\,d\psi$ haben, wo $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ rationale Functionen von Φ, Φ', ψ und t bezeichnen, sind vollständige Differentiale nicht nur für den Werth t, welcher (21.) zum Verschwinden bringt, sondern für jede Wurzel der Gleichung (20.). Diesem Umstande entspringt eine Umformung der Ausdrücke (21.)—(23.). Es lässt sich nämlich jede Wurzel der Gleichung (20.) darstellen in der Form

$$(24.)\qquad t = \frac{\psi\Phi}{\varkappa\lambda} + X_1 + X_2 + X_3,$$

wo die Quadrate der Grössen (X_i) das Wurzelsystem der Gleichung dritten Grades

$$(25.)\qquad \begin{cases} F_2(X) = \Big(X^2 - \dfrac{\psi^2\Phi^2}{\varkappa^2\lambda^2}\Big)\Big(X^2 - \dfrac{\Phi'^2(1-\psi^2)}{\varkappa^2\lambda^2}\Big)^2 \\ -\dfrac{1}{\varkappa\lambda}\Big(C' + \dfrac{1-\psi^2}{\Phi^2}\Big)X^2\Big(X^2 - \dfrac{\Phi'^2(1-\psi^2)}{\varkappa^2\lambda^2}\Big) - \dfrac{A^2\Phi'^2}{\varkappa^2\lambda^2}X^2 = 0 \end{cases}$$

sind, während sie selbst der beschränkenden Bedingung unterworfen sind:

$$(26.)\qquad X_1 X_2 X_3 = \frac{\Phi\Phi'^2\psi(1-\psi^2)}{\varkappa^3\lambda^3}.$$

Mit Rücksicht hierauf lässt sich jeder Ausdruck, welcher die Eigenschaft der Grössen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ hat, auf die Form bringen

$$MR + \Sigma X_i R(X_i^2) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo die Function R rational von ψ, Φ und Φ' und die Functionen $R(X_i^2)$ ausserdem noch rational von X_i^2 abhängen. Die Differentiale gehen über in die Form:

$$R_1 d\psi + R_2 d\varphi + \Sigma X_i\big(R_1(X_i^2)\,d\psi + R_2(X_i^2)\,d\varphi\big).$$

Die Aenderung, welche in diesem Ausdruck hervorgerufen wird, wenn man an Stelle der Grösse t, die den Zähler des in (21.) gegebenen Ausdrucks für $d\omega$ zum Verschwinden bringt, irgend eine andere Wurzel von (20.) wählt, besteht bekanntlich darin, dass zwei der Grössen X_i das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. Daraus folgt dann sofort, dass jedes der Differentiale

$$R_1 d\psi + R_2 d\psi \quad \text{und} \quad X_i(R_1(X_i^2)d\psi + R_2(X_i^2)d\varphi)$$

ein vollständiges Differential sein muss.

Nach Formel (21.) war der Coefficient von $d\psi$ in $d\omega$ gleich

$$\frac{1}{A}\frac{4\Phi' t}{\varkappa^2\lambda^2 F_1'(t)} = \frac{1}{A}\frac{4\Phi' t}{\varkappa^2\lambda^2(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)},$$

wo t_1, t_2 und t_3 die ausser t vorhandenen Wurzeln der Gleichung (20.) bezeichnen, oder wenn für t der durch Formel (24.) gegebene Ausdruck und für t_1, t_2, t_3 die entsprechenden Ausdrücke gesetzt werden:

$$\frac{1}{2A}\frac{\Phi'\left(\frac{\psi\Phi}{\varkappa\lambda} + X_1 + X_2 + X_3\right)}{(X_1+X_2)(X_2+X_3)(X_3+X_1)}.$$

Erweitern wir den vorstehenden Quotienten mit

$$(X_1-X_2)(X_2-X_3)(X_3-X_1),$$

so erhalten wir im Zähler die Summe zweier Ausdrücke, von denen der eine

$$\frac{\psi\Phi\Phi'}{\varkappa\lambda}(X_1-X_2)(X_2-X_3)(X_3-X_1)$$

$$= \frac{\psi\Phi\Phi'}{\varkappa\lambda}\{X_1(X_2^2-X_3^2)+X_2(X_3^2-X_1^2)+X_3(X_1^2-X_2^2)\}$$

ist, während der andere:

$$\Phi'(X_1+X_2+X_3)(X_1-X_2)(X_2-X_3)(X_3-X_1)$$

$$-\Phi' X_1 X_2 X_3\left\{\frac{1}{X_1}(X_2^2-X_3^2)+\frac{1}{X_2}(X_3^2-X_1^2)+\frac{1}{X_3}(X_1^2-X_2^2)\right\}$$

mit Rücksicht auf Formel (26.) übergeht in

$$-\frac{\Phi\Phi'^3\psi(1-\psi^2)}{\varkappa^3\lambda^3}\left\{\frac{1}{X_1}(X_2^2-X_3^2)+\frac{1}{X_2}(X_3^2-X_1^2)+\frac{1}{X_3}(X_1^2-X_2^2)\right\}.$$

Schreibt man nun zur Abkürzung

$$F_2'(X_i^2) = \frac{\partial}{\partial(X_i^2)}[F_2(X_i^2)],$$

so erhält man für den fraglichen Coefficienten folgenden Ausdruck, in

welchem sich die Summation auf $i = 1, 2, 3$ bezieht,

$$-\frac{1}{2A}\Sigma\frac{\psi\Phi\Phi'}{\varkappa^3\lambda^3 X_i F_2'(X_i^2)}\left(X_i^2-\frac{\Phi'^2(1-\psi^2)}{\varkappa^2\lambda^2}\right).$$

Führt man ähnliche Operationen für die fünf anderen Coefficienten aus, so erhält man endlich für $d\omega$, du und $d\vartheta$ folgende Ausdrücke:

$$(27.)\qquad d\omega = -\frac{1}{2A}\Sigma\frac{\psi\Phi\Phi' d\psi+\varkappa^2\lambda^2 X_i^2 d\varphi}{X_i F_2'(X_i^2)\varkappa^3\lambda^3}\left[X_i^2-\frac{\Phi'^2(1-\psi^2)}{\varkappa^2\lambda^2}\right] = 0,$$

$$(28.)\qquad 2du = \Sigma\frac{\psi\Phi\Phi' d\psi+\varkappa^2\lambda^2 X_i^2 d\varphi}{X_i F_2'(X_i^2)\varkappa^2\lambda^2}\,\frac{X_i^2 A}{\Phi^2},$$

$$(29.)\qquad d\vartheta = \Sigma\frac{\psi\Phi\Phi' d\psi+\varkappa^2\lambda^2 X_i^2 d\varphi}{X_i F_2'(X_i^2)\varkappa^2\lambda^2}\,\frac{A\Phi'^2}{\varkappa^2\lambda^2}.$$

Eine unmittelbar zu erkennende Eigenschaft der Summen auf der rechten Seite ist die, dass die Quotienten der zu demselben Index i gehörenden Glieder der Ausdrücke $d\omega$, du und $d\vartheta$ von den Differentialen $d\psi$ und $d\varphi$ völlig unabhängig sind, sodass diese Quotienten sich als Functionen einer Variabeln v_i darstellen lassen und die Differentiale die Form $f(v_i)dv_i$ annehmen.

Als diejenige Variable, durch welche wir die $i$ten Glieder in den obigen Ausdrücken darstellen, wählen wir die Grösse

$$(30.)\qquad v_i = \left[X_i^2-\frac{\Phi'^2(1-\psi^2)}{\varkappa^2\lambda^2}\right]:\frac{X_1^2}{\Phi^2} = \Phi^2-\frac{\Phi^2\Phi'^2(1-\psi^2)}{\varkappa^2\lambda^2 X_i^2},$$

welche bis auf einen constanten Factor mit dem Quotienten der betreffenden Glieder in $d\omega$ und du übereinstimmt, während man den Quotienten der entsprechenden Glieder von $d\vartheta$ und du erhält, wenn man das Quadrat der Grösse

$$(31.)\qquad w_i = \frac{\Phi\Phi'}{\varkappa\lambda X_i}$$

bildet.

Berechnet man nun aus (30.) und (31.) die Grössen ψ^2 und X_i^2 und setzt die sich ergebenden Ausdrücke in die Formel (20.) ein, so erhält man folgende Gleichung:

$$(32.)\qquad F_3(v_i, w_i) \equiv A^2 w_i^4\varkappa^2\lambda^2+(C'\varkappa\lambda v_i+v_i^2)w_i^2+v_i(v_i-\varkappa)(v_i-\lambda) = 0,$$

in welcher, wie zu erwarten war, Φ und Φ' nicht mehr vorkommen; dieselbe ist, wie man sieht, vom Geschlecht 3. Wir wollen zeigen, dass auf Differentiale von *Abel*schen Integralen, welche aus dieser Gleichung entspringen, sich die Glieder der Summen in den Gleichungen (27.), (28.)

und (29.) reduciren. Zu dem Ende differentiiren wir zunächst Gleichung (32.) und erhalten dadurch die Gleichung:

$$\frac{\partial F_3}{\partial v_i} dv_i + \frac{\partial F_3}{\partial (w_i^2)} d(w_i^2) = 0,$$

welche nach Multiplication mit $\frac{\partial v_i}{(\partial X_i^2)}$ übergeht in:

$$\frac{\partial F_3}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial X_i^2} dv_i + \frac{\partial F_3}{\partial w_i^2} d(w_i^2) \frac{\partial v_i}{\partial X_i^2} = 0$$

oder

$$\Big(\frac{\partial F_3}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial X_i^2} + \frac{\partial F_3}{\partial w_i^2} \frac{\partial (w_i^2)}{\partial X_i^2}\Big) dv_i + \frac{\partial F_3}{\partial w_i^2} \Big(d(w_i^2) \frac{\partial v}{\partial X_i^2} - dv_i \frac{\partial (w_i^2)}{\partial X_i^2}\Big) = 0,$$

was dann weiter auf die Gleichung führt:

$$\frac{w_i dv_i}{F_3'(v_i, w_i)} = \frac{(\Phi\Phi'\psi d\psi + \varkappa^2\lambda^2 X_i^2 . d\varphi)\Phi'}{F_2''(X_i^2)\varkappa^4\lambda^4\Phi}.$$

Man übersieht unmittelbar, dass nach bekannten Sätzen der Algebra bei der Summation nach dem Index i über die Zahlen 1, 2, 3 die rechte Seite gleich Null wird. Ebenso erkennt man leicht die Grössen, mit welchen man die vorstehende Gleichung zu multipliciren hat, damit ihre rechte Seite in ein Glied der rechten Seite einer der Gleichungen (27.), (28.) oder (29.) übergehe. Es sind die Grössen

$$\frac{1}{A} \frac{\varkappa\lambda\Phi}{X_i\Phi'} \Big(X_i^2 - \frac{\Phi'^2(1-\psi^2)}{\varkappa^2\lambda^2}\Big) = \frac{1}{A} \frac{v_i}{w_i},$$

$$\frac{\varkappa^2\lambda^2 A X_i}{\Phi\Phi'} = \frac{A\varkappa\lambda}{w_i}, \quad \frac{A\Phi\Phi'}{X_i} = A\varkappa\lambda w_i.$$

Man erhält demnach folgende vier Formeln, in welchen sich die Summation wieder auf die Werthe 1, 2, 3 des Index i bezieht:

$$(33.) \qquad \Sigma \frac{w_i dv_i}{F_3'(v_i, w_i)} = 0, \quad \Sigma \frac{v_i dv_i}{F_3''(v_i, w_i)} = 0, \quad \Sigma \frac{dv_i}{F_3'(v_i, w_i)} = \frac{2du}{A\varkappa\lambda},$$

$$(34.) \qquad A\varkappa\lambda \Sigma \frac{w_i^2 dv_i}{F_3'(v_i, w_i)} = d\vartheta.$$

Mit Hülfe der aus (30.) und (31.) folgenden Gleichungen

$$v_i = \Phi^2 - (1-\psi^2) w_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

lassen sich nun die Grössen ψ^2 und Φ^2 als symmetrische Functionen der Werthepaare v_i, w_i^2 darstellen und daher in Folge der Gleichungen (33.) aus dreifach unendlichen Thetareihen zusammensetzen, deren Argumente ganze lineare Functionen der Grösse u sind; dasselbe gilt von ϑ und daher

auch von den Coordinaten der zugehörigen beiden Randpunkte, d. h. von:

$$x_1 = \frac{\cos\varphi}{\Phi} = \frac{\sqrt{\lambda-\Phi^2}}{\Phi\sqrt{\lambda-\varkappa}}, \quad y_1 = \frac{\sin\varphi}{\Phi} = \frac{\sqrt{\Phi^2-\varkappa}}{\Phi\sqrt{\lambda-\varkappa}},$$

$$\zeta_1 = \frac{\psi}{\Phi}, \quad \xi_1+i\eta_1 = \frac{\sqrt{1-\psi^2}}{\Phi}e^{i\vartheta}, \quad \xi_1-i\eta_1 = \frac{\sqrt{1-\psi^2}}{\Phi}e^{-i\vartheta}.$$

Diese Darstellung lässt sich jedoch bequemer bewerkstelligen, indem man zeigt, dass die Logarithmen dieser Grösse sich in Summen von *Abel*schen Integralen verwandeln lassen, oder dass ihre logarithmischen Differentiale die Form annehmen:

$$\Sigma\frac{dv_i R(v_i w_i)}{F_3'(v_i w_i)}.$$

Es handelt sich um die fünf Grössen

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{\lambda\Phi' d\varphi}{\Phi(\Phi^2-\lambda)}, \quad \frac{dy_1}{y_1} = \frac{\varkappa\Phi' d\varphi}{\Phi(\Phi^2-\varkappa)}, \quad \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} = \frac{d\psi}{\psi} - \frac{\Phi'}{\Phi}d\varphi,$$

$$\frac{d(\xi_1+i\eta_1)}{\xi_1+i\eta_1} = -\frac{\psi d\psi}{1-\psi^2} - \frac{\Phi' d\varphi}{\Phi} + i d\vartheta, \quad \frac{d(\xi_1-i\eta_1)}{\xi_1-i\eta_1} = -\frac{\psi d\psi}{1-\psi^2} - \frac{\Phi' d\varphi}{\Phi} - i d\vartheta,$$

oder, da $d\vartheta$ schon auf die erwähnte Form gebracht ist, nur um die drei ersten von ihnen und den reellen Theil der beiden andern, welche sämmtlich die Form haben:

$$\mathfrak{U}\psi d\psi + \mathfrak{W}\Phi\Phi' d\varphi,$$

wo $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ rationale Functionen von ψ^2 und Φ^2 bezeichnen. Man erkennt nun leicht, dass, wenn überhaupt eine Darstellung in der oben erwähnten Form möglich ist, $R(v_i, w_i)$ die speciellere Form $w_i R(v_i, w_i^2)$ annehmen muss. Der zweite Factor dieses Ausdrucks kann nun, wenn man für v_i und w_i^2 ihre Werthe aus den Formeln (30.) und (31.) einsetzt, mit Rücksicht auf die Gleichung (25.) auf die Form

$$\frac{U}{X_i^2} + V + WX_i^2$$

gebracht werden, wo U, V, W rationale Functionen von ψ^2 und Φ^2 sind. Indem wir nach dem Index i summiren, verschwindet das Glied mit V vollständig, während man aus den beiden übrigen erhält

$$U\frac{\varkappa^2\lambda^2 d\psi}{\psi(1-\psi^2)^2\Phi^2\Phi'^2} + W\frac{d\varphi\Phi'}{\varkappa^2\lambda^2\Phi}.$$

Sollen sich also die in Frage stehenden Ausdrücke auf die erwähnte Form bringen lassen, so muss es für jeden derselben eine Function V von ψ und

Φ^2 der Beschaffenheit geben, dass

$$S_i = \frac{\mathfrak{U}(1-\psi^2)^2\psi^2\Phi^2\Phi'^2}{X_i^2\varkappa^2\lambda^2} + V + \mathfrak{W}\Phi^2\varkappa^2\lambda^2X_i^2 \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

eine rationale Function von v_i und w_i^2 wird.

Nun lassen sich in den vier Fällen sehr leicht derartige Functionen errathen. Man erhält nämlich in den einzelnen Fällen folgende Werthsysteme

$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{W}$	V	S_i
0	$\frac{\lambda}{\Phi^2(\Phi^2-\lambda)}$	$\lambda(1-\psi^2)$	$\lambda\left[(1-\psi^2)+\frac{\varkappa^2\lambda^2X_i^2}{\Phi^2-\lambda}\right] = -\lambda\frac{v_i-\varkappa}{w_i^2}$,
0	$\frac{\varkappa}{\Phi^2(\Phi^2-\varkappa)}$	$\varkappa(1-\psi^2)$	$\varkappa\left[(1-\psi^2)+\frac{\varkappa^2\lambda^2X_i^2}{\Phi^2-\varkappa}\right] = -\varkappa\frac{v_i-\lambda}{w_i^2}$.
$\frac{1}{\psi^2}$	$-\frac{1}{\Phi^2}$	$-(2\Phi^2-\varkappa-\lambda)(1-\psi^2)$	$\left[\frac{(1-\psi^2)^2\Phi^2\Phi'^2}{X_i^2\varkappa^2\lambda^2}-(2\Phi^2-\varkappa-\lambda)(1-\psi^2)-\varkappa^2\lambda^2X_i^2\right] = \frac{(v_i-\lambda)(v_i-\varkappa)}{w_i^2}$,
$-\frac{1}{1-\psi^2}$	$-\frac{1}{\Phi^2}$	$\Phi^2-(2\Phi^2-\varkappa-\lambda)(1-\psi^2)$	$\left[\Phi^2-\frac{\psi^2(1-\psi^2)\Phi^2\Phi'^2}{X_i^2\varkappa^2\lambda^2}-(2\Phi^2-\varkappa-\lambda)(1-\psi^2)-\varkappa^2\lambda^2X_i^2\right] = \frac{(v_i-\lambda)(v_i-\varkappa)}{w_i^2}+v_i$.

Wir machen jetzt die eindeutig umkehrbare Substitution

$$v_i = \frac{\varkappa\lambda}{s_i}, \quad w_i = \frac{t_i}{s_i\sqrt{A}}$$

und erhalten dann, indem wir $\frac{C'}{A} = -2\alpha$, $\frac{1}{A} = -2\beta$ setzen, zwischen t_i und s_i die Gleichung

$$(35.) \qquad f(t_i,\ s_i) = t_i^4 - 2t_i^2(\alpha s_i+\beta) + s_i(s_i-\varkappa)(s_i-\lambda) = 0.$$

Nach Einführung dieser Variabeln erhält man nun folgendes System von Formeln, in welchem sich die Summation auf den Index i für die Werthe 1, 2 und 3 bezieht und zur Abkürzung $f'(t_i) = \frac{\partial f(t_i, s_i)}{\partial t_i}$ gesetzt ist:

$$(36.) \qquad \Sigma\frac{t_i\,ds_i}{f'(t_i)} = 0, \quad \Sigma\frac{ds_i}{f'(t_i)} = 0, \quad \Sigma\frac{s_i\,ds_i}{f'(t_i)} = \frac{2\,du}{\sqrt{A}},$$

$$(37.) \qquad \frac{dx_1}{x_1} = -\Sigma\frac{ds_i}{f'(t_i)}\frac{(s_i-\lambda)s_i}{t_i}, \qquad (38.) \qquad \frac{dy_1}{y_1} = -\Sigma\frac{ds_i}{f'(t_i)}\frac{(s_i-\varkappa)s_i}{t_i},$$

$$(39.) \qquad \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} = -\Sigma\frac{ds_i}{f'(t_i)}\frac{(s_i-\varkappa)(s_i-\lambda)}{t_i},$$

$$(40.) \qquad \frac{d(\xi_1+i\eta_1)}{\xi_1+i\eta_1} = -\Sigma\frac{ds_i}{f'(t_i)}\left[\frac{(s_i-\varkappa)(s_i-\lambda)}{t_i}+\sqrt{2\beta}\,\frac{t_i}{s_i}(t_i-\sqrt{2\beta})\right],$$

$$(41.) \qquad \frac{d(\xi_1-i\eta_1)}{\xi_1-i\eta_1} = -\Sigma\frac{ds_i}{f'(t_i)}\left[\frac{(s_i-\varkappa)(s_i-\lambda)}{t_i}-\sqrt{2\beta}\,\frac{t_i}{s_i}(t_i+\sqrt{2\beta})\right].$$

Alle diese Differentiale lassen sich nun in einfacher Weise durch eine von Herrn ***Weierstrass*** eingeführte rationale Function zweier Werthepaare $x'y'$, xy darstellen, welche beide dem durch die Gleichung:

$$y^4-2y^2(\alpha x+\beta)+x(x-\varkappa)(x-\lambda) = 0$$

definirten Gebilde vom Range 3 angehören. Diese Function, von Herrn ***Weierstrass*** mit $H(x'y', xy)$ bezeichnet, soll, als Function von $x'y'$ betrachtet, an drei festen Stellen $a_\alpha b_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) von der ersten Ordnung, ausserdem an der Stelle xy in der Art unendlich werden, dass für $x' = x\ y' = y$

$$(x-x')H(x'y',\ xy) = 1$$

wird; an einer weiteren festen Stelle $a_0 b_0$ soll die Function den Werth Null annehmen. Bis auf die letzte sind alle diese Bedingungen erfüllt durch den Ausdruck

$$\frac{1}{\frac{\partial f(xy)}{\partial y}}\left\{\frac{F(y', xy)}{x-x'}+\Sigma_\alpha\left(1+\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial a_\alpha}}{\Delta}(x-a_\alpha)+\frac{\frac{\partial \Delta}{\partial b_\alpha}}{\Delta}(y-b_\alpha)\right)\frac{F(y', a_\alpha b_\alpha)}{x'-a_\alpha}\right\},$$

wo zur Abkürzung

$$F(y', xy) = (y+y')(y'^2+y^2-2(\alpha x+\beta)),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

gesetzt ist; wir erfüllen auch die letzte Bedingung, wenn wir von dem obigen Ausdruck den Werth subtrahiren, welchen er für $x' = a_0$, $y' = b_0$ annimmt.

Setzt man in $H(x'y', xy)$ für $x'y'$ ein Functionspaar ein, welches die Umgebung der Stelle $a_\alpha b_\alpha$ darstellt — z. B $x'_\alpha = a_\alpha + t$, $y' = b_\alpha + t\mathfrak{P}(t)_\alpha$, wenn die Stelle $a_\alpha b_\alpha$ nicht singulär ist — so erhält man, falls (xy) in hinreichender Entfernung von dieser Stelle liegt, eine Entwickelung von der Form

$$t^{-1}H(xy)_\alpha+\sum_0^\infty t^m H^{(m)}(xy)_\alpha.$$

Die Functionen $H(xy)_\alpha$ und $H^{(1)}(xy)_\alpha$ liefern uns die drei Integrale erster und die drei Integrale zweiter Gattung:

$$J(xy)_\alpha = \int_{a_0 b_0}^{xy} H(xy)_\alpha dx \quad \text{und} \quad J'(xy)_\alpha = \int_{a_0 b_0}^{xy} H^{(1)}(xy)_\alpha dx.$$

Zu den Integralen dritter Gattung gelangen wir, indem wir in $H(x'y', xy)$

zwei specielle Werthepaare $x'y'$ und $x'_0y'_0$ setzen und dann bilden

$$\int_{a_0b_0}^{xy} \{H(x'y', xy) - H(x'_0y'_0, xy)\}\, dx.$$

Für uns kommen in Betracht die fünf Fälle:

$x' = \varkappa\ y' = 0,\ x'_0\infty\ y'_0\infty;\ x' = \lambda\ y' = 0,\ x'_0\infty\ y'_0\infty;\ x' = 0\ y' = 0,\ x'_0\infty\ y'_0\infty;$

$x' = 0\ y' = \sqrt{2\beta},\ x'_0\infty\ y'_0\infty;\quad x' = 0\ y' = -\sqrt{2\beta},\ x'_0\infty\ y'_0\infty;$

denn, abgesehen von additiven Gliedern der Form

$$\sum_{a=1}^{a=3} A_a H(xy)_a,$$

erhalten wir in diesen Fällen für die Differenz

$$H(x'y',\ xy) - H(x'_0y'_0,\ xy)$$

die Werthe

$$-\frac{x(x-\lambda)}{yf'(y)},\quad -\frac{x(x-\varkappa)}{yf'(y)},\quad -\frac{(x-\varkappa)(x-\lambda)}{yf'(y)},$$

$$-\frac{1}{f'(y)}\left\{\frac{(x-\varkappa)(x-\lambda)}{y} - \sqrt{2\beta}\,\frac{y}{x}(y+\sqrt{2\beta})\right\},$$

$$-\frac{1}{f'(y)}\left\{\frac{(x-\varkappa)(x-\lambda)}{y} + \sqrt{2\beta}\,\frac{y}{x}(y-\sqrt{2\beta})\right\}.$$

Die Theorie der *Abel*schen Functionen lehrt, wie man einen Ausdruck von der Form:

$$\sum_{a=1}^{a=3} \int_{a_ab_a}^{x_ay_a} \{H(x'y',\ xy) - H(x'_0y'_0,\ xy)\}\, dx,$$

oder vielmehr diejenige Grösse

$$E(x'y',\ x'_0y'_0;\ u_1u_2u_3),$$

von welcher die vorstehende der natürliche Logarithmus ist, durch die drei Summen

$$(42.)\quad u_\beta = \sum_{a=1}^{a=3} \int_{a_ab_a}^{x_ay_a} H(xy)_\beta\, dx \qquad (\beta = 1, 2, 3)$$

darstellen kann. Sind nämlich

$$2\omega_{a\beta},\quad 2\omega'_{a\beta} \qquad \begin{pmatrix} a = 1, 2, 3 \\ \beta = 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

simultane primitive Perioden der Integrale $J_a (\alpha = 1, 2, 3)$, $2\eta_{a\beta}$, $2\eta'_{a\beta}$ die entsprechenden Perioden der Integrale $J'(xy)_a$, θ eine eindeutige Function der Variabeln u_1, u_2, u_3, welche durch die sechs Gleichungen

$$(43.)\quad \begin{cases} \theta(u_1+2\omega_{1\beta},\ u_2+2\omega_{2\beta},\ u_3+2\omega_{3\beta}) = e^{\Sigma 2\eta_{\alpha\beta}(u_\alpha+\omega_{\alpha\beta})}\,\theta(u_1,\ u_2,\ u_3) \\ \theta(u_1+2\omega'_{1\beta},\ u_2+2\omega'_{2\beta},\ u_3+2\omega'_{3\beta}) = e^{\Sigma 2\eta'_{\alpha\beta}(u_\alpha+\omega'_{\alpha\beta})}\,\theta(u_1,\ u_2,\ u_3) \end{cases} \quad (\beta=1,2,3)$$

bis auf eine multiplicative Constante bestimmt ist, endlich

$$w_\alpha = J(x'y')_\alpha, \quad \overset{0}{w}_\alpha = J(x'_0y'_0)_\alpha$$

und $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ gewisse sowohl von u_1, u_2, u_3 als von $x'y'$, $x'_0y'_0$ unabhängige Grössen, so ist:

$$(44.)\quad E(x'y', x'_0y'_0; u_1u_2u_3) = \frac{\theta(-\overset{0}{w}_\alpha+\bar{\omega}_\alpha)\,\theta(u_\alpha-w_\alpha+\bar{\omega}_\alpha)}{\theta(-w_\alpha+\bar{\omega}_\alpha)\,\theta(u_\alpha-\overset{0}{w}_\alpha+\bar{\omega}_\alpha)}\,e^{\Sigma(J'(x'y')_\alpha-J'(x'_0y'_0)_\alpha)u_\alpha};$$

dabei ist zu beachten, dass die verschiedenen Integrale zwischen denselben Grenzen auch auf demselben Wege zu bestimmen sind. Ferner ist zu bemerken, dass die Perioden nicht unabhängig von einander sind; es bestehen zwischen ihnen folgende Gleichungen

$$(45.)\quad \begin{cases} \sum\limits_\gamma(\omega_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma}-\omega_{\beta\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}) = 0, \\ \sum\limits_\gamma(\eta_{\alpha\gamma}\eta'_{\beta\gamma}-\eta_{\beta\gamma}\eta'_{\alpha\gamma}) = 0, \\ \sum\limits_\gamma(\eta_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma}-\eta'_{\alpha\gamma}\omega_{\beta\gamma}) = \begin{cases} 0 \\ \pi i \\ \frac{2}{} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \beta \gtrless \alpha \\ \beta = \alpha \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Was endlich die Grössen $\bar{\omega}_\alpha$ betrifft, so kann, wenn

$$(46.)\quad c_\alpha = \sum_\beta \int_{a_0b_0}^{a_\beta b_\beta} H(xy)_\alpha\,dx$$

gesetzt, und mit $p_\mu q_\mu$ eines der vier Werthepaare bezeichnet wird, welche einer beliebigen linearen Gleichung

$$\beta y+\alpha x+\gamma = 0$$

genügen,

$$\bar{\omega}_\alpha = c_\alpha - \tfrac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\mu=4} J(p_\mu q_\mu)_\alpha$$

und in Folge dessen

$$(47.)\quad \begin{cases} u_\alpha-w_\alpha+\bar{\omega}_\alpha = u_\alpha+c_\alpha-w_\alpha-\tfrac{1}{2}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=4} J(p_\mu q_\mu)_\alpha \\ \qquad = \sum\limits_\beta \int\limits_{a_0b_0}^{x_\beta y_\beta} H(xy)_\alpha\,dx - \int\limits_{a_0b_0}^{x'y'} H(xy)_\alpha\,dx - \tfrac{1}{2}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=4}\int\limits_{a_0b_0}^{p_\mu q_\mu} H(xy)_\alpha\,dx \\ \qquad = \sum\limits_\beta \int\limits_{\infty\infty}^{x_\beta y_\beta} H(xy)_\alpha\,dx - \int\limits_{\infty\infty}^{x'y'} H(xy)_\alpha\,dx - \tfrac{1}{2}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=4}\int\limits_{\infty\infty}^{p_\mu q_\mu} H(xy)_\alpha\,dx \end{cases}$$

gesetzt werden.

Es ist leicht zu sehen, dass der letzte Bestandtheil eine halbe Periode ist. Nennen wir nun den ersten Bestandtheil v_α, den zweiten $-w'_\alpha$, so dürfen wir

$$(48.) \qquad u_\alpha - w_\alpha + \bar{\omega}_\alpha = v_\alpha - w'_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\beta=3} 2\mu_\beta \omega_{\alpha\beta} + \sum_{\beta=1}^{\beta=3} 2\nu_\beta \omega'_{\alpha\beta}$$

setzen, wenn wir unter μ_β und ν_β Zahlen verstehen, die den Werth 0 oder $\frac{1}{2}$ haben. Definiren wir nun eine Function $\theta(u_1, u_2, u_3; \mu, \nu)$ durch die Gleichung:

$$(49.) \quad \theta(u_1, u_2, u_3; \mu, \nu) = e^{\Sigma[2\bar{\eta}_\alpha(u_\alpha+\bar{\omega}_\alpha)-\pi i\mu_\alpha\nu_\alpha]}\theta(u_1+2\bar{\omega}_1,\ u_2+2\bar{\omega}_2,\ u_3+2\bar{\omega}_3),$$

in welcher

$$\bar{\omega}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\beta=3} \mu_\alpha \omega_{\alpha\beta} + \sum_{\beta=1}^{\beta=3} \nu_\beta \omega'_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

und

$$\bar{\eta}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\beta=3} \mu_\beta \eta_{\alpha\beta} + \sum_{\beta=1}^{\beta=3} \nu_\beta \eta'_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

ist, so haben wir die Gleichung:

$$(50.) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(x'y', x_0y_0;\ u_1u_2u_3) \\ = \dfrac{\theta(c'_\alpha - \overset{0}{w}{}'_\alpha;\ \mu, \nu)\theta(v_\alpha - w'_\alpha;\ \mu, \nu)}{\theta(c'_\alpha - w'_\alpha;\ \mu, \nu)\theta(v_\alpha - \overset{0}{w}{}'_\alpha;\ \mu, \nu)}\, e^{\Sigma(J'(x'y')_\alpha - J'(x'_0y'_0)_\alpha)(v_\alpha - c'_\alpha)}. \end{array} \right.$$

Jetzt fehlt zur völligen Lösung unserer Aufgabe nur noch die Bestimmung der Charakteristik, d. h. der Gesammtheit der Grössen μ_α, ν_α. Bevor wir uns an diese Bestimmung machen, wollen wir mit der Bedeutung der eingeführten Buchstaben eine Aenderung vornehmen, welche, ohne die Gültigkeit der aufgestellten Gleichungen aufzuheben, eine leichtere Bestimmung der Perioden gestattet. Es bleiben nämlich die Relationen zwischen den Perioden, die Definitionen der Thetafunctionen, wie endlich der Ausdruck für

$$E(x'y',\ x_0y_0;\ u_1u_2u_3)$$

ungeändert, wenn wir statt der ursprünglich eingeführten Integrale erster Gattung diejenigen benutzen, welche aus den Ausdrücken der Form

$$(51.) \qquad \overline{H}(xy)_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} c_{\alpha\beta} H(xy)_\alpha \qquad (\beta = 1, 2, 3)$$

entspringen, wo die Grössen $c_{\alpha\beta}$ bis auf die eine Bedingung, dass ihre Determinante Δ nicht verschwindet, völlig willkürlich sind; gleichzeitig ist dann die Bedeutung der Integrale zweiter Gattung dahin zu ändern,

dass an Stelle der ursprünglichen Functionen $H^{(1)}(xy)_\alpha$ die Functionen

$$(52.) \qquad \bar{H}^{(1)}(xy)_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial c_{\alpha\beta}}}{\Delta} H^{(1)}(xy)_\alpha$$

benutzt werden. Wir wählen die Constanten c so, dass

$$(53.) \qquad \bar{H}(xy)_1 = \frac{x}{f'(y)}, \quad \bar{H}(xy)_2 = \frac{1}{f'(y)}, \quad \bar{H}(xy)_3 = \frac{y}{f'(y)}$$

wird, und verstehen also von jetzt ab unter v_α den Ausdruck

$$\sum_{\beta=1}^{\beta=3} \int_{x_0}^{x_\beta} y_\beta \bar{H}(xy)_\alpha dx \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Für die Bestimmung der Perioden sind von wesentlichster Bedeutung die singulären Stellen des Gebildes

$$y^4 - 2y^2(\alpha x + \beta) + x(x-\varkappa)(x-\lambda) = 0$$

und ihre gegenseitige Lage. Ausser der unendlich fernen Stelle gehören nun hierher zunächst die Stellen

$$(x = 0 \;\; y = 0), \quad (x = \varkappa \;\; y = 0), \quad (x = \lambda \;\; y = 0);$$

der Grösse nach geordnet mögen die Grössen 0, $\varkappa$, λ mit $b_1 < b_2 < b_3$ bezeichnet werden. Bezeichnen wir mit a_1, a_2, a_3 die Wurzeln der Gleichung

$$(\alpha x + \beta)^2 - x(x-\varkappa)(x-\lambda) = 0,$$

so sind auch die sechs Stellen singulär:

$$(x = a_i \;\; y = \pm\sqrt{\alpha a_i + \beta}) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Die Grössen a_1, a_2, a_3 sind entweder sämmtlich reell, oder es ist eine von ihnen reell und die beiden anderen sind conjugirt imaginär. Tritt das erstere ein, so haben wir folgende sechs Fälle zu unterscheiden

$$1) \quad -\frac{\beta}{\alpha} < b_1 < a_1 < a_2 < b_2 < b_3 < a_3,$$

$$2) \quad b_1 < a_1 < -\frac{\beta}{\alpha} < a_2 < b_2 < b_3 < a_3,$$

$$3) \quad b_1 < a_1 < a_2 < b_2 < -\frac{\beta}{\alpha} < b_3 < a_3,$$

$$4) \quad b_1 < b_2 < -\frac{\beta}{\alpha} < b_3 < a_1 < a_2 < a_3,$$

$$5) \quad b_1 < a_1 < a_2 < b_2 < b_3 < a_3 < -\frac{\beta}{\alpha},$$

$$6) \quad b_1 < b_2 < b_3 < a_1 < -\frac{\beta}{\alpha} < a_2 < a_3,$$

während für den Fall zweier imaginären Wurzeln

$$7)\quad -\frac{\beta}{\alpha} < b_1 < b_2 < b_3 < a_3,$$

$$8)\quad b_1 < b_2 < -\frac{\beta}{\alpha} < b_3 < a_3,$$

$$9)\quad b_1 < b_2 < b_3 < a_3 < -\frac{\beta}{\alpha}$$

sein kann. Die Bestimmung der fundamentalen Periodensysteme fordert die Bestimmung von $\varrho = 3$ Paaren geschlossener Integrationswege, von denen sich nur zwei zusammengehörige und auch diese nur je einmal schneiden.

Für den Fall 6), den wir als den bequemsten weiter durchführen wollen, erhalten wir solche Paare auf folgende Weise. Wir beschreiben zunächst in der x-Ebene um b_1 und b_2 als ihren Brennpunkten eine Ellipse K_1 und in derselben Weise um b_2 und b_3 eine Ellipse K_1', welche von den singulären Punkten nur b_1 und b_2, resp. b_2 und b_3 einschliessen; dieselben mögen sich in P_1 und P_1' schneiden. Von den vier Werthen y, welche zu P_1 gehören, haben zwei die Eigenschaft, dass wir, nachdem wir eine der Curven K_1 und K_1' durchlaufen haben, zu dem ursprünglichen Werth zurückgelangen; in dem zweiten Schnittpunkte P_1' langen wir auf den beiden Wegen mit verschiedenen Werthen y an. Die Integrationswege K_1 und K_1' schneiden sich also nur einmal. Zur vollständigen Bestimmung gehört noch, dass wir y für P_1 fixiren und den Sinn, in welchem wir die Integrationswege durchlaufen, so festsetzen, dass K_1' den Integrationsweg K_1 im positiven Sinne schneidet. Ein weiteres Paar von Integrationswegen der verlangten Art erhalten wir in zwei Ellipsen K_2 und K_2' mit den Brennpunkten $b_1 a_2$ und $a_2 a_3$, welche sich in den Punkten P_2 und P_2' schneiden. Im Punkte P_2 kann y zwei durch das Vorzeichen unterschiedene Werthe annehmen, für welche die Wege K_2 und K_2' geschlossen sind und sich nur einmal schneiden; und zwar haben die Paare von Wegen, welche wir auf diese Weise von K_2 und K_2' erhalten, keinen einzigen Punkt gemeinsam. Wir haben also drei Paare von Integrationswegen $K_1 K_1'$, $K_2 K_2'$, $K_3 K_3'$, welche sich gegenseitig nicht schneiden, obgleich sich die beiden letzteren in der x-Ebene decken. Man erhält, wie leicht zu sehen, für die Integrale erster Gattung folgendes System von Perioden:

$$\begin{array}{llll}
\int \bar{H}(xy)_1 dx & 2\omega_{11} 2\omega_{11}' & 2\omega_{12} 2\omega_{12}' & -2\omega_{12} - 2\omega_{12}', \\
\int \bar{H}(xy)_2 dx & 2\omega_{21} 2\omega_{21}' & 2\omega_{22} 2\omega_{22}' & -2\omega_{22} - 2\omega_{22}', \\
\int \bar{H}(xy)_3 dx & 0 \quad 0 & 2\omega_{32} 2\omega_{32}' & +2\omega_{32} + 2\omega_{32}',
\end{array}$$

während sich für die Integrale zweiter Gattung das simultane Periodensystem

$$\begin{array}{cccccc} 2\eta_{11} & 2\eta'_{11} & 2\eta_{12} & 2\eta'_{12} & -2\eta_{12} & -2\eta'_{12} \\ 2\eta_{21} & 2\eta'_{21} & 2\eta_{22} & 2\eta'_{22} & -2\eta_{22} & -2\eta'_{22} \\ 0 & 0 & 2\eta_{32} & 2\eta'_{32} & +2\eta_{32} & +2\eta'_{32} \end{array}$$

ergiebt.

Von den oben angegebenen Beziehungen (Gl. (45.)) werden einige in unserem speciellen Falle zu Identitäten. Es bleiben noch 7 Relationen, nämlich:

$$(54.)\quad \begin{cases} 1) & \omega_{11}\omega'_{21}-\omega_{21}\omega'_{11}+2(\omega_{12}\omega'_{22}-\omega_{22}\omega'_{12}) = 0, \\ 2) & \eta_{11}\eta'_{21}-\eta_{21}\eta'_{11}+2(\eta_{12}\eta'_{22}-\eta_{22}\eta'_{12}) = 0, \\ 3) & \eta_{11}\omega'_{11}-\eta'_{11}\omega_{11}+2(\eta_{12}\omega'_{12}-\eta'_{12}\omega_{12}) = \frac{\pi i}{2}, \\ 4) & \eta_{21}\omega'_{11}-\eta'_{21}\omega_{11}+2(\eta_{22}\omega'_{12}-\eta'_{22}\omega_{12}) = 0, \\ 5) & \eta_{11}\omega'_{21}-\eta'_{11}\omega_{21}+2(\eta_{12}\omega'_{22}-\eta'_{12}\omega_{22}) = 0, \\ 6) & \eta_{21}\omega'_{21}-\eta'_{21}\omega_{21}+2(\eta_{22}\omega'_{22}-\eta'_{22}\omega_{22}) = \frac{\pi i}{2}, \\ 7) & 2(\eta_{32}\omega'_{32}-\eta'_{32}\omega_{32}) = \frac{\pi i}{2}. \end{cases}$$

Mit Hülfe der speciellen Eigenschaften der Periodensysteme lassen sich die Constanten μ, ν näher bestimmen. Bekanntlich verschwindet

$$\theta(v_\alpha - w'_\alpha;\ \mu, \nu),$$

sobald eins der Werthepaare $x_\alpha y_\alpha$ dem Werthepaare $x'y'$ gleich wird, d. h. wenn man schreiben kann:

$$v_\alpha - w'_\alpha = \int_{x\,x}^{x_1 y_1} \bar{H}(xy)_\alpha dx + \int_{x\,x}^{x_2 y_2} \bar{H}(xy)_\alpha dx,$$

wo $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ völlig willkürlich sind. Wir setzen jetzt fest, dass $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$ sein soll; dann können wir bewirken, dass $v_1 - w'_1 = v_2 - w'_2 = 0$ wird, während $v_3 - w_3$ einen beliebig vorgeschriebenen Werth

$$4\mu'\omega_{32} + 4\nu'\omega'_{32}$$

annimmt, wo μ' und ν' reelle Grössen bezeichnen. Für die genannten Werthsysteme $x_\alpha y_\alpha$ giebt es eine allgemeine Form der Differenzen $v_\alpha - w'_\alpha$, nämlich

$$2\mu'(\omega_{\alpha 2}+\omega_{\alpha 3}) + 2\nu'(\omega'_{\alpha 2}+\omega'_{\alpha 3}) \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Für ein solches Werthsystem können wir nun bekanntlich die Bedingung, dass $\theta(v_\alpha - w'_\alpha;\ \mu, \nu)$ verschwindet, wenn wir

$$\mu''_1 = \mu_1, \quad \mu''_2 = \mu_2 + \mu', \quad \mu''_3 = \mu_3 + \mu',$$
$$\nu''_1 = \nu_1, \quad \nu''_2 = \nu_2 + \nu', \quad \nu''_3 = \nu_3 + \nu'$$

setzen, auch schreiben:

$$\theta(0, 0, 0;\ \mu'', \nu'') = 0.$$

Wenn μ' und ν' Zahlen mit dem Nenner 2 werden, so nehmen μ'' und ν'' dieselbe Eigenschaft an. Da nun das Gebilde kein hyperelliptisches ist, so können für 000 gerade Thetafunctionen nicht verschwinden, d. h. die vier Charakteristiken, welche wir für

$$\mu' = 0,\ \nu' = 0;\quad \mu' = \tfrac{1}{2},\ \nu' = 0;\quad \mu' = 0,\ \nu' = \tfrac{1}{2};\quad \mu' = \tfrac{1}{2},\ \nu' = \tfrac{1}{2}$$

erhalten, müssen die Bedingung

$$\Sigma 4\mu''\nu'' \equiv 1 \pmod 2$$

erfüllen; daraus folgt, dass wir

$$(55.)\qquad \mu_1 = \nu_1 = \tfrac{1}{2},\quad \mu_2 = \mu_3,\quad \nu_2 = \nu_3$$

setzen dürfen.

Eine noch genauere allgemeine Bestimmung der Charakteristik werden wir nicht geben, sondern die vollständige Bestimmung des Werthes von

$$E(x'y', x_0y_0;\ u_1u_2u_3)$$

nur für den Fall durchführen, dass, wie bei unserem Problem, v_3 einen gewissen constanten Werth hat. Bei der Beschaffenheit des Periodensystems lassen sich nämlich die dreifach unendlichen Thetareihen mit den Argumenten u_1, u_2, u_3 rational darstellen durch Thetareihen mit den Argumenten u_1, u_2 und solche mit dem Argumente u_3 *); ist nun die letztgenannte Grösse constant, so reduciren sich die dreifach unendlichen Thetafunctionen auf zweifach unendliche. Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu erweisen, bilden wir die Function

$$(56.)\qquad f(u_1, u_2, u_3;\ \mu, \nu) = \theta(u_1, u_2, u_3;\ \mu, \nu) + e^{-\pi i(\nu_2+\nu_3)}\theta(u_1, u_2, u_3;\ \mu', \nu),$$

wo die Charakteristik μ, ν völlig willkürlich ist, und die Grössen μ' mit den Grössen μ verbunden sind durch die Gleichungen

$$\mu_1' = \mu_1,\quad \mu_2' = \mu_2 + \tfrac{1}{2},\quad \mu_3' = \mu_3 + \tfrac{1}{2}.$$

Berücksichtigen wir, dass für ganze Zahlen p und q

$$(57.)\qquad \theta(u_\alpha;\ \mu+p, \nu+q) = e^{2\pi i \Sigma p_\alpha \nu_\alpha}\theta(u_\alpha;\ \mu, \nu),$$

und für ein beliebiges Aggregat simultaner Periodenbruchtheile

$$2\bar{\omega}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\beta=3} 2\mu'_\beta\omega_{\alpha\beta} + \sum_{\beta=1}^{\beta=3} 2\nu'_\beta\omega'_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad 2\bar{\eta}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\beta=3} 2\mu'_\beta\eta_{\alpha\beta} + \sum_{\beta=1}^{\beta=3} 2\nu'_\beta\eta'_{\alpha\beta},$$

$$(58.)\qquad \theta(u_\alpha + 2\bar{\omega}_\alpha;\ \mu, \nu) = e^{\Sigma[2\bar{\eta}_\alpha(u_\alpha+\bar{\omega}_\alpha) - i\nu'_\alpha(\mu'_\alpha+2\mu_\alpha)\pi]}\theta(u_\alpha;\ \mu+\mu',\ \nu+\nu')$$

*) Vergl. die Abhandlung der Fr. *von Kovalewsky*, Acta Mathematica Bd. V.

ist, so erhalten wir, indem wir zu u_1 und u_2, nicht aber zu u_3, eine Periode von der Form

$$2\varpi_a = 2p_1\omega_{a1}+2p_2\omega_{a2}+2q_1\omega'_{a1}+4q_2\omega'_{a2} \qquad (a=1, 2)$$

addiren, oder, was dasselbe besagt, zu u_1, u_2, u_3 eine simultane halbe Periode von der Form

$$2\varpi_a = 2p_1\omega_{a1}+p_2\omega_{a2}-p_2\omega_{a3}+2q_1\omega'_{a1}+2q_2\omega'_{a2}-2q_2\omega'_{a3} \qquad (a=1, 2, 3)$$

hinzufügen, folgende Gleichung:

$$(59.)\quad \begin{cases} f(u_1+2\varpi_1,\ u_2+2\varpi_2,\ u_3;\ \mu,\ \nu) = f(u_1,\ u_2,\ u_3;\ \mu,\ \nu) \\ \times e^{2\tilde{\eta}_1(u_1+\tilde{\omega}_1)+2\tilde{\eta}_2(u_2+\tilde{\omega}_2)-i[q_1(p+2\mu_1)+q_2(p_2+2(\mu_2-\mu_3))]\pi+2\left[p_1\nu_1+p_2\frac{\nu_2-\nu_3}{2}\right]\pi i} \end{cases}.$$

Fügen wir jedoch zu u_3 die Periode

$$2\varpi_3 = 2p\omega_{32}+4q\omega'_{32}$$

und lassen u_1 und u_2 ungeändert, wofür wir auch sagen können, dass u_1, u_2, u_3 simultan um die halben Perioden

$$2\varpi_a = p(\omega_{a2}+\omega_{a3})+2q(\omega'_{a2}+\omega'_{a3}) \qquad (a=1, 2, 3)$$

vermehrt seien, so erhalten wir für $f(u_1, u_2, u_3; \mu, \nu)$ die zweite Relation:

$$(60.)\quad \begin{cases} f(u_1, u_2, u_3+2\varpi_3;\ \mu, \nu) \\ = f(u_1, u_2, u_3; \mu, \nu)e^{2\tilde{\eta}_3(u_3+\tilde{\omega}_3)-iq[p+2(\mu_2+\mu_3)]\pi+2\pi ip\frac{\nu_2+\nu_3}{2}} \end{cases}.$$

Die Bedingung (59.) charakterisirt bis auf einen lediglich von u_3 abhängigen Factor $f(u_1, u_2, u_3; \mu, \nu)$ als eine Thetafunction der Variabeln u_1 und u_2 mit den Perioden

$$2\omega_{a1},\quad 2\omega'_{a1},\quad 2\omega_{a2},\quad 4\omega'_{a2} \qquad (a=1, 2);$$
$$2\eta_{a1},\quad 2\eta'_{a1},\quad 2\eta_{a2},\quad 4\eta'_{a2} \qquad (a=1, 2)$$

und der Charakteristik

$$\mu_1 \quad \mu_2-\mu_3, \quad \nu_1 \quad \tfrac{1}{2}(\nu_2-\nu_3),$$

während die Relation (60.) den vorerwähnten Factor als eine Thetafunction der einen Veränderlichen u_3 mit den Perioden

$$2\omega_{32},\quad 4\omega_{32};\quad 2\eta_{32},\quad 4\eta'_{32}$$

und der Charakteristik

$$\mu_2+\mu_3,\quad \tfrac{1}{2}(\nu_2+\nu_3)$$

erkennen lässt. Wir haben also die Gleichung

$$(61.)\quad \begin{cases} f(u_1, u_2, u_3;\ \mu, \nu) = \theta(u_a;\ \mu, \nu) + e^{-\pi i(\nu_2+\nu_3)}\theta(u_a;\ \mu', \nu) \\ = C_{\mu,\nu}\theta(u_3;\ \mu_2+\mu_3,\ \tfrac{1}{2}(\nu_2+\nu_3))\theta(u_1,\ u_2;\ \mu_1\ \mu_2-\mu_3,\ \nu_1\ \tfrac{1}{2}(\nu_2-\nu_3)). \end{cases}$$

Wenn die Charakteristik (μ, ν') mit (μ, ν) verbunden ist durch die Gleichungen

$$\nu_1' = \nu_1, \quad \nu_2' = \nu_2+1, \quad \nu_3' = \nu_3,$$

so ist

$$f(u_1, u_2, u_3;\ \mu, \nu') = \theta(u_a;\ \mu, \nu) - e^{-\pi i(\nu_2+\nu_3)}\theta(u_a;\ \mu',\ \nu)$$
$$= C_{\mu,\nu'}\theta(u_3;\ \mu_2+\mu_3, \tfrac{1}{2}(\nu_2+\nu_3+1))\theta(u_1, u_2;\ \mu_1\ \mu_2-\mu_3, \nu_1\ \tfrac{1}{2}(\nu_2-\nu_3+1)).$$

Wir erhalten also für $\theta(u_a;\ \mu, \nu)$ einen Ausdruck von der Form

$$A\theta(u_3;\ \mu_2+\mu_3, \tfrac{1}{2}(\nu_2+\nu_3))\quad \theta(u_1, u_2;\ \mu_1\ \mu_2-\mu_3, \nu_1\ \tfrac{1}{2}(\nu_2-\nu_3))$$
$$+B\theta(u_3;\ \mu_2+\mu_3, \tfrac{1}{2}(\nu_2+\nu_3+1))\theta(u_1, u_2;\ \mu_1\ \mu_2-\mu_3, \nu_1\ \tfrac{1}{2}(\nu_2-\nu_3+1)),$$

in welchem A und B Constante bezeichnen, welche durch Specialisirung leicht zu erhalten wären. Für die Thetafunctionen, welche wir oben angewendet haben, ist

$$\mu_1 = \nu_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \mu_2 = \mu_3, \quad \nu_2 = \nu_3,$$

und zwar war jede der vier letztgenannten Grössen 0 oder $\frac{1}{2}$; für diese Charakteristik ist also, wenn $\delta = (\mu_2+\mu_3)$, $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu_2+\nu_3)$ ist,

$$(62.)\quad \begin{cases} \theta(v_a - w_a';\ \mu, \nu) = A\theta(v_3 - w_3';\ \delta, \varepsilon\ \ )\theta(v_1 - w_1', v_2 - w_2';\ \tfrac{1}{2}\ 0, \tfrac{1}{2}\ 0) \\ \quad +B\theta(v_3 - w_3';\ \delta, \varepsilon+\tfrac{1}{2})\theta(v_1 - w_1, v_2 - w_2',\ \tfrac{1}{2}\ 0, \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}). \end{cases}$$

Ein Werthesystem $x_a y_a$, für welches die linke Seite verschwindet, ist

$$x_1 = x', \quad y_1 = y', \quad x_2 = x', \quad y_2 = -y', \quad x_3 = 0, \quad y_3 = 0.$$

Die Integrale, welche zu den beiden ersten Werthepaaren gehören, sollen auf demselben Wege bestimmt werden wie w'; über den Weg der Integrale

$$t_a = \int_{\infty\,\infty}^{00} \bar{H}(xy)_a dx$$

soll später verfügt werden; dann erhalten wir die Gleichung

$$A\theta(t_3 + w_3';\ \delta, \varepsilon\ \ )\theta(t_1 - w_1', t_2 - w_2';\ \tfrac{1}{2}\ 0,\ \tfrac{1}{2}\ 0)$$
$$+B\theta(t_3 + w_3';\ \delta, \varepsilon+\tfrac{1}{2})\theta(t_1 - w_1', t_2 - w_2';\ \tfrac{1}{2}\ 0,\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}) = 0.$$

Die einfach unendlichen Thetafunctionen sind beide gerade; wir können also das Zeichen von $t_3 + w_3$ ändern und den Inhalt der vorstehenden Gleichung auch so aussprechen:

$$t_a - w_a' \qquad (a = 1, 2)$$

ist eine Nullstelle der Function von u_1, u_2

$$(63.)\quad \begin{cases} A\theta(-(t_3+w_3');\ \delta, \varepsilon\ \ )\theta(u_1, u_2;\ \tfrac{1}{2}\,0, \tfrac{1}{2}\,0) \\ +B\theta(-(t_3+w_3');\ \delta, \varepsilon+\tfrac{1}{2})\theta(u_1, u_2;\ \tfrac{1}{2}\,0, \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}). \end{cases}$$

Dieser Umstand gestattet eine wesentliche Vereinfachung der von uns gesuchten Ausdrücke. Wir haben es nämlich nicht mit allgemeinen Werthsystemen $x_a y_a$ zu thun, sondern mit solchen, welche sämmtlich der Relation:

$$(64.)\quad z\lambda x - \Phi^2 x^2 - 2\beta(1-\psi^2)y^2 = 0$$

Genüge thun. Diese Gleichung hat als Function des elliptischen Werthepaares (xy^2) die Wurzel $x=0$, $y^2=0$ und drei weitere; aus jeder der letzteren ist ein Werthepaar $s_a t_a$ abzuleiten. Unendlich wird die linke Seite als Function von (xy^2) betrachtet nur im Unendlichen, und zwar von der vierten Ordnung. Es gilt also, welches auch immer die Bedeutung und der Werth von Φ^2 und ψ^2 sein möge, die Gleichung

$$\sum_{a=1}^{a=3} \int_{x\,x}^{s_a t_a} \bar{H}(x\,y)_3\,dx + \int_{x\,x}^{\infty\,\infty} \bar{H}(xy)_3\,dx = 0,$$

oder es ist, wenn der vorläufig noch unbestimmt gelassene Weg von t_a passend gewählt wird,

$$v_3 = -t_3.$$

Für unsere Werthsysteme gehen also die dreifach unendlichen Thetafunctionen in die oben erwähnten Functionen zweier Variabeln über. An Stelle der ersteren können wir daher Ausdrücke von der Form setzen:

$$(65.)\quad \begin{cases} \theta(t_a - w_a';\ \mu, \nu')\theta(v_a - w_a';\ \mu, \nu) - \theta(t_a - w_a';\ \mu, \nu)\theta(v_a - w_a';\ \mu, \nu') \\ \qquad \{(\mu, \nu) = \tfrac{1}{2}\,0, \tfrac{1}{2}\,0,\ (\mu, \nu') = \tfrac{1}{2}\,0, \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2})\}, \end{cases} \quad (a=1, 2)$$

den einen Fall ausgenommen, dass $t_a - w_a'$ eine gemeinschaftliche Nullstelle beider Thetafunctionen zweier Variabeln ist; das tritt ein für $x'=0$ $y'=0$. Um eine Formel für diesen Fall zu erlangen, betrachten wir das Werthsystem

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad y_2 = y_3 = \sqrt{2\beta}$$

und nehmen sämmtliche Integrale auf demselben Wege wie die Grössen w_a', welche hier den Werth

$$\int_{x\,x}^{\infty\,\infty} \bar{H}(xy)_a\,dx$$

haben. Man erkennt dann leicht, dass

$$v_3 - w_3' = -(t_3 + w_3')$$

gesetzt werden darf, und dass also für

$$v_\alpha - w'_\alpha = 2\int_{\infty\,\infty}^{0\sqrt{2\beta}} \bar{H}(x\,y)_\alpha dx = 2\overset{(1)}{w'_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

der Ausdruck (63.) ebenfalls gleich Null wird. Für den Ausnahmefall erhalten wir demnach an Stelle von (65.) den Ausdruck

$$(66.)\quad \theta(2\overset{(1)}{w'_\alpha};\ \mu, \nu')\theta(v_\alpha - t_\alpha;\ \mu, \nu) - \theta(2\overset{(1)}{w'_\alpha};\ \mu, \nu)\theta(v_\alpha - t_\alpha;\ \mu, \nu').$$

Ein lineares Aggregat zweier Thetafunctionen mit den Charakteristiken

$$(\mu, \nu) = \tfrac{1}{2}\,0,\ \tfrac{1}{2}\,0, \quad (\mu, \nu') = \tfrac{1}{2}\,0,\ \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}$$

kann bekanntlich als Thetafunction zweiter Ordnung mit der Charakteristik $(\frac{1}{2}0, 00)$ angesehen werden, deren Perioden in gewisser Weise von denen der vorgelegten Functionen abhängen. In unserem Falle sind die Perioden

$$\begin{matrix} 4\omega_{\alpha 1}, & 4\omega_{\alpha 2}, & 2\omega'_{\alpha 1}, & 4\omega'_{\alpha 2}, \\ 2\eta_{\alpha 1}, & 2\eta_{\alpha 2}, & \eta'_{\alpha 1}, & 2\eta'_{\alpha 2}. \end{matrix} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

Bei dieser Umwandlung wollen wir jedoch die Thetafunctionen statt durch Beifügung der Charakteristik durch einen Index bezeichnen und zwar sollen den Charakteristiken

$$0\tfrac{1}{2},\ 0\tfrac{1}{2};\quad \tfrac{1}{2}0,\ 00;\quad 00,\ \tfrac{1}{2}0;\quad \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}0;\quad \tfrac{1}{2}0,\ \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2};\quad \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}$$

die Indices

$$0, \qquad 1, \qquad 2, \qquad 3, \qquad 4, \qquad 5$$

entsprechen. Dann kann jede ungerade Charakteristik durch den Index 0 oder $0\varkappa(\varkappa = 1, 2, \ldots 5)$, jede gerade Charakteristik durch einen Index von der Form $0\varkappa\lambda(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots 5)$ bezeichnet werden (cf. ***Schottky,*** Theorie der *Abel*schen Functionen von drei Variabeln. Leipzig 1880. § 4. pag. 16), wenn wir die zu einem aus den Indices $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ zusammengesetzten Index m gehörige Charakteristik in folgender Weise bestimmen. Zum Index α möge die Charakteristik

$$(\tfrac{1}{2}\delta_1^{(\alpha)}\,\tfrac{1}{2}\delta_2^{(\alpha)},\quad \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{(\alpha)}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon_2^{(\alpha)})$$

gehören, zum Index β die Charakteristik

$$(\tfrac{1}{2}\delta_1^{(\beta)}\,\tfrac{1}{2}\delta_2^{(\beta)},\quad \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{(\beta)}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon_2^{(\beta)}),\quad \text{etc.}$$

Sind $\delta_1^{(m)}$, $\delta_2^{(m)}$, $\varepsilon_1^{(m)}$, $\varepsilon_2^{(m)}$ die kleinsten nicht negativen Zahlen, welche den Relationen

$$\delta_i^{(m)} \equiv \delta_i^{(\alpha)} + \delta_i^{(\beta)} + \delta_i^{(\gamma)} \ldots \pmod 2 \qquad (i = 1, 2),$$
$$\varepsilon_i^{(m)} \equiv \varepsilon_i^{(\alpha)} + \varepsilon_i^{(\beta)} + \varepsilon_i^{(\gamma)} \ldots \pmod 2 \qquad (i = 1, 2)$$

genügen, so soll zum Index (m) die Charakteristik

$$(\tfrac{1}{2}\delta_1^{(m)}\tfrac{1}{2}\delta_2^{(m)},\ \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{(m)}\tfrac{1}{2}\varepsilon_2^{(m)})$$

gehören. So ist z. B. die Charakteristik des Index 034 gleich (00, 00), während der Index 025 durch den einfachen Index 1 ersetzt werden kann, weil zu beiden die Charakteristik

$$\tfrac{1}{2}0,\quad 00$$

gehört.

Das Product

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=m}\theta(u_\alpha-v_\alpha^{(\mu)})_{k_\mu},$$

wo

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=m}v_\alpha^{(\mu)}=0,$$

ist eine specielle Thetafunction $m$ter Ordnung. Ihre Charakteristik stimmt mit derjenigen einer Thetafunction erster Ordnung mit dem zusammengesetzten Index $(k_1, k_2, \ldots k_m)$ überein: Die allgemeinste derartige Function erhält man durch ein lineares Aggregat der speciellen Functionen mit gleicher Charakteristik.

Nun ist ein bekanntes Theorem, dass sich jede Thetafunction $m$ter Ordnung von ϱ Variabeln linear ausdrücken lässt durch r^ϱ specielle; d. h. auf unseren Fall angewendet, der Ausdruck

$$\theta(v_\alpha;\ \mu,\nu')\theta(u_\alpha;\ \mu,\nu)-\theta(v_\alpha;\ \mu,\nu)\theta(u_\alpha;\ \mu,\nu')$$

lässt sich als eine algebraische Summe darstellen von irgend vier linear unabhängigen Ausdrücken der Form

$$\theta(u_\alpha-v_\alpha)_{k_1}\theta(u_\alpha+v_\alpha)_{k_2},$$

und zwar sind hier k_1 und k_2 so zu wählen, dass sie zusammen die Charakteristik des Index 1 liefern; solche Ausdrücke sind

$$\theta(u_\alpha-v_\alpha)_{01}\,\theta(u_\alpha+v_\alpha)_0,\quad \theta(u_\alpha-v_\alpha)_0\,\theta(u_\alpha+v_\alpha)_{01},$$
$$\theta(u_\alpha-v_\alpha)_{01\lambda}\theta(u_\alpha+v_\alpha)_{0\lambda},\quad \theta(u_\alpha-v_\alpha)_{0\lambda}\theta(u_\alpha+v_\alpha)_{01\lambda}.$$

Da aber die vorgelegte Function für $u_\alpha=\pm v$ verschwindet, so sind die Coefficienten der beiden letzten Glieder gleich Null zu setzen; ferner erkennt man leicht, dass der in Frage stehende Ausdruck überhaupt eine ungerade Function ist; bis auf einen constanten Factor stimmt derselbe daher überein mit:

$$\theta(u_\alpha-v_\alpha)_{01}\theta(u_\alpha+v_\alpha)_0-\theta(u_\alpha-v_\alpha)_0\theta(u_\alpha+v_\alpha)_{01}.$$

Dieses wenden wir auf den Ausdruck

$$e^{\sum_a \int_{a_a b_a}^{s_a' a} (H(x'y', xy) - H(x_0'y_0', xy))\,dx}$$

an; setzen wir für $v_a + t_a$ den Buchstaben v_a', so dass also

$$v_a' = \sum_{\beta=1}^{\beta=3} \int_{x\,x}^{s_\beta' t_\beta} \bar{H}(xy)_a\,dx + \int_{x\,x}^{00} \bar{H}(xy)_a\,dx \qquad (a = 1, 2)$$

ist, so ergiebt sich für den genannten Exponentialausdruck der Werth

$$(67.) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(x'y', x_0'y_0'; \bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3) \\ = C \dfrac{\theta(v_a' - 2t_a)_{01}\,\theta(v_a' - 2w_a')_0 - \theta(v_a' - 2t_a)_0\,\theta(v_a' - 2w_a')_{01}}{\theta(v_a' - 2t_a)_{01}\,\theta(v_a' - 2\overset{0}{w}{}_a')_0 - \theta(v_a' - 2t_a)_0\,\theta(v_a' - 2\overset{0}{w}{}_a')_{01}} e^{\sum_{a=1}^{a=2} c_a v_a'}; \end{array} \right.$$

ist $x'y'$ identisch mit 00, so ist der Zähler mit

$$\theta(v_a' - 2t_a + 2\overset{(1)}{w}{}_a')_{01}\,\theta(v_a' - 2t_a - 2\overset{(1)}{w}{}_a')_0 - \theta(v_a' - 2t_a + 2\overset{(1)}{w}{}_a')_0\,\theta(v_a' - 2t_a - 2\overset{(1)}{w}{}_a')_{01}$$

zu vertauschen. Für die weiteren Entwickelungen haben wir zu unterscheiden, ob es sich um eine Ellipse oder eine Hyperbel handelt; wir wollen die Rechnung hier nur für den ersteren Fall durchführen. In diesem ist $b_1 = 0$ und daher

$$t_a = \omega_{a1}' + 2\varpi_a \qquad (a = 1, 2),$$

wo $2\varpi_a$ eine Periode der dreifach unendlichen Thetafunctionen bezeichnet; folglich ist $2t_a$ auch eine Periode der letzthin angewendeten Thetafunctionen, bei welcher der Coefficient der dritten primitiven Periode ungerade ist. Daher dürfen wir in dem Quotienten der Differenzen von Thetafunctionen $2t_a$ einfach unterdrücken, wenn wir gleichzeitig das Minuszeichen in ein Pluszeichen verwandeln. Nur in dem Ausnahmefall tritt im Zähler keine Aenderung des Zeichens ein; dafür aber haben wir dem Ausdruck den Factor

$$e^{-2\sum \bar{\eta}_a (u_a + \bar{\omega}_a)}$$

hinzuzufügen, wo $2\bar{\eta}_a$ die Periode der Integrale zweiter Gattung ist, welche der Periode $2t_a$ entspricht, d. h. in den ursprünglichen Perioden geschrieben: $\eta_{a1}' + 2\tilde{\eta}_a$. Nun ist aber der Coefficient von u_a in der schon vorher vorhandenen Exponentialfunction

$$J'(x'y')_a - J'(x_0y_0)_a = \int_{x\,\infty}^{x'y'} \bar{H}'(xy)_a\,dx - \int_{x\,\infty}^{x_0'y_0'} \bar{H}'(xy)_a\,dx.$$

Der zweite Theil verschwindet, wenn $x_0'y_0' \infty \infty$ wird, wie es bei den für

unsere Aufgabe in Betracht kommenden Werthepaaren der Fall ist; der erste wird in dem speciellen Ausnahmefall $\eta'_{a1}+2\tilde{\eta}_{a}$. Berücksichtigen wir nun die Relation (64.) zwischen Φ und ψ einerseits und den Grenzen der Integrale andererseits, so erhalten wir, da $\overset{0}{w}_a = 0$ ist, aus (67.) für $x'=0$ $y'=0$:

$$\frac{\psi}{\Phi} = C\,\frac{\theta(v'_a-2\overset{(1)}{w}'_a)_0\,\theta(v'_a+2\overset{(1)}{w}'_a)_{01}-\theta(v'_a-2\overset{(1)}{w}'_a)_{01}\,\theta(v'_a+2\overset{(1)}{w}'_a)_0}{2\theta(v'_a)_0\,\theta(v'_a)_{01}}.$$

Setzt man $x'=\varkappa$, $y'=0$, resp. $x=\lambda$, $y=0$, so erhält man links

$$\frac{\sqrt{\lambda-\Phi^2}}{\Phi\sqrt{\lambda-\varkappa}} \text{ resp. } \frac{\sqrt{\Phi^2-\varkappa}}{\Phi\sqrt{\lambda-\varkappa}}$$

und rechts, da die w'_a bis auf ganze Perioden gleich ω_a, resp. $\omega_{a1}+\omega'_{a1}$ werden,

$$C'\,\frac{\theta^2(v'_a)_0+\theta^2(v'_a)_{01}}{2\theta(v'_a)_0\,\theta(v'_a)_{01}} \quad \text{resp.} \quad C''\,\frac{\theta^2(v'_a)_0-\theta^2(v'_a)_{01}}{2\theta(v'_a)_0\,\theta(v'_a)_{01}},$$

(NB. wenn $\varkappa > \lambda$ ist). Für die Constanten C' und C'' erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\lambda\left\{\frac{\sqrt{\Phi^2-\varkappa}}{\Phi\sqrt{\lambda-\varkappa}}\right\}^2+\varkappa\left\{\frac{\sqrt{\lambda-\Phi^2}}{\Phi\sqrt{\lambda-\varkappa}}\right\}^2 = 1$$

die Werthe $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ und $\frac{1}{i\sqrt{\lambda}}$. Setzen wir jetzt endlich $x'=0$, $y'=\mp\sqrt{2\beta}$, so erhalten wir links $\frac{\sqrt{1-\psi^2}}{\Phi}e^{\pm i\vartheta}$, rechts dagegen einen Ausdruck

$$C_1\,\frac{\theta(v'_a)_0\,\theta(v'_a\pm\overset{(1)}{2w}'_a)_{01}+\theta(v'_a)_{01}\,\theta(v'_a\pm\overset{(1)}{2w}'_a)_0}{2\theta(v'_a)_0\,\theta(v'_a)_{01}}\,e^{\mp\Sigma c_a v'_a\pm c}.$$

Indem man aus den fünf Gleichungen ϑ, ψ und Φ eliminirt, erhält man eine Gleichung, aus welcher sich durch Specialisirung C und C_1 ergiebt. In Folge der Differentialgleichung zwischen ψ und Φ wird v'_1 eine lineare Function der von uns oben u genannten Grösse, welche die horizontale Projection des zu φ gehörenden Theiles der gesuchten Fläche darstellt, während v'_2 einen constanten Werth erhält. Unterdrücken wir nun bei v und w die Accente, so erhalten wir die Coordinaten zweier entsprechenden Punkte des Randes des gegebenen ebenen und des gesuchten krummen Flächenstückes als Functionen eines Parameters u vermittels der folgenden Gleichungen:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\theta^2(v_a)_0 + \theta^2(v_a)_{01}}{2\theta(v_a)_0\theta(v_a)_{01}},$$

$$y_1 = \frac{1}{i\sqrt{\lambda}} \frac{\theta^2(v_a)_0 - \theta^2(v_a)_{01}}{2\theta(v_a)_0\theta(v_a)_{01}},$$

$$\zeta_1 = C \frac{\theta(v_a-2w_a)_0\theta(v_a+2w_a)_{01} - \theta(v_a-2w_a)_{01}\theta(v_a+2w_a)_0}{2\theta(v_a)_0\theta(v_a)_{01}},$$

$$\xi_1+i\eta_1 = C_1 \frac{\theta(v_a)_0\theta(v_a+2w_a)_{01} + \theta(v_a)_{01}\theta(v_a+2w_a)_0}{2\theta(v_a)_0\theta(v_a)_{01}} e^{mu+n},$$

$$\xi_1-i\eta_1 = C_1 \frac{\theta(v_a)_0\theta(v_a-2w_a)_{01} + \theta(v_a)_{01}\theta(v_a-2w_a)_0}{2\theta(v_a)_0\theta(v_a)_{01}} e^{-mu-n}.$$

Nachdem so die Coordinaten entsprechender Randpunkte als Functionen eines Parameters dargestellt sind, ist es sehr leicht, die Coordinaten beliebiger Punkte als Functionen zweier Parameter zu bestimmen. Es seien x, y und ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktepaares in der Ebene und auf der gesuchten Fläche. Da einer durch den Scheitel des Sectors gehenden Geraden in der Ebene eine erzeugende Gerade der Kegelfläche entspricht und da gerade Linien, welche nach der Befestigung des Gebildes im Raum gerade bleiben, keine Aenderung ihrer Länge erfahren können, so giebt es ein solches Paar entsprechender Randpunkte, dass

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{\xi+i\eta}{\xi_1+i\eta_1} = \frac{\xi-i\eta}{\xi_1-i\eta_1} = \frac{\zeta}{\zeta_1}$$

ist; nennen wir den gemeinsamen Werth dieser Quotienten t, so erhalten wir durch die fünf Gleichungen

$$x = tx_1, \quad y = ty_1, \quad \zeta = t\zeta_1, \quad \xi+i\eta = t(\xi_1+i\eta_1), \quad \xi-i\eta = t(\xi_1-i\eta_1)$$

die Coordinaten eines beliebigen Punktepaares als Functionen der beiden Grössen t und u dargestellt; damit ist das Ziel dieser Abhandlung erreicht.

Berlin, December 1885.

Preisaufgabe der Fürstlich *Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1889.

Obgleich durch die Untersuchungen von *Borchardt* über das arithmetisch-geometrische Mittel ein gewisser Zusammenhang der Thetafunctionen mehrerer Variabeln mit mehrfachen Integralen nachgewiesen worden, und obgleich die Ausdehnung des *Abel*schen Theorems auf vielfache algebraische Integrale schon *Jacobi* nicht unbekannt war *), so scheinen doch selbst die betreffenden Doppelintegrale noch keiner erschöpfenden Betrachtung unterworfen worden zu sein. Da sich nun zeigen lässt, dass, wenn z. B. $\vartheta\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4\vartheta_5$ gewisse einer sogenannten *Rosenhain*schen Gruppe (*Crelle*s Journal, Bd. XL, S. 342) angehörige Thetafunctionen zweier Variabeln u und v bedeuten, die Determinante

$$\begin{vmatrix} \vartheta & \vartheta_1 & \vartheta_2 \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial u} & \frac{\partial\vartheta_1}{\partial u} & \frac{\partial\vartheta_2}{\partial u} \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial v} & \frac{\partial\vartheta_1}{\partial v} & \frac{\partial\vartheta_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

dem Product $\vartheta_3\vartheta_4\vartheta_5$ proportional ist, so ergiebt sich daraus (Leipziger Berichte, Jahrgang 1884, S. 187; vgl. die folgende Abhandlung, S. 79) für

$$x = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta}\right)^2, \quad y = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta}\right)^2$$

eine Gleichung von der Form

$$du\,dv = \frac{dx\,dy}{\sqrt{R(x^4 y^4)}}.$$

*) Siehe *Crelle*s Journal Bd. VIII, S. 415, sowie *Rosenhain* in seinen an *Jacobi* gerichteten Briefen im XL. Bande des *Crelle*schen Journals, wo auch Integrale von der Form $\iint \frac{dt\,du}{\sqrt{F(tu)}}$ betrachtet werden, in denen $F(tu)$ das Product von sechs linearen Factoren $A+Bt+Cu$ ist. Vergl. ferner die *Nöther*schen Arbeiten in den Göttinger Nachrichten, 1869 Nr. 15 und Bd. II der Mathemat. Annalen, S. 293.

Die Gesellschaft wünscht

eine eingehende Untersuchung der allgemeineren Doppelintegrale von der Form

$$\iint \frac{f(xy)\,dx\,dy}{\sqrt{R(xy)}},$$

wo f eine rationale Function sei, in ihrem Zusammenhange mit den Thetafunctionen zweier Variabeln.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in *deutscher*, *lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem *30. November des angegebenen Jahres*, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Leipzig, im März 1886.

Ueber eine Transformationsformel für Doppelintegrale *).

(Von Herrn *W. Scheibner* in Leipzig.)

Die Auflösung der quadratischen Gleichung $fx = 0$ beruht darauf, dass der Differentialquotient $f'x$ nur zwei entgegengesetzte Werthe annehmen kann. Dies folgt z. B. aus der bekannten Gleichung $\Sigma \frac{1}{f'x} = 0$, mithin ist $(f'x)^2$ durch eine ganze Function der Coefficienten — die Discriminante — gegeben.

Bei zwei Functionen zweiter Dimension in x und y sind im Allgemeinen vier Werthsysteme xy vorhanden, für welche $f = \varphi = 0$; in der *Jacobi*schen Gleichung (dieses Journal, Bd. XIV S. 286)

$$\Sigma \frac{ax+by+c}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)}} = 0$$

steigt die Functionaldeterminante auf den zweiten Grad und kann vier Werthe annehmen. Setzt man jedoch

$$f = pxy+p_1x+p_2y+p_3 = 0,$$
$$\varphi = qxy+q_1x+q_2y+q_3 = 0,$$

so reduciren sich die vier Werthsysteme von xy auf zwei (zwei Schnittpunkte der gleichseitigen Hyperbeln rücken ins Unendliche) und die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)} = (p_1q-pq_1)x+(pq_2-p_2q)y+p_1q_2-p_2q_1$$

*) Abgedruckt aus den Berichten der math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1884 (Sitzung am 15. December).

wird linear. Alsdann bleibt die Gleichung gültig

$$\Sigma \frac{1}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)}} = 0 \text{ *)},$$

sodass wiederum $\left(\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)}\right)^2$ eine ganze Function der Coefficienten p und q darstellt. Man erhält mit leichter Mühe

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)}\right)^2 &= (p_1q_2-p_2q_1+pq_3-p_3q)^2-4(pq_2-p_2q)(p_1q_3-p_3q_1)\\ &= (p_1q_2-p_2q_1-pq_3+p_3q)^2-4(pq_1-p_1q)(p_2q_3-p_3q_2).\end{aligned}$$

Schreibt man dafür mit abgekürzter Bezeichnung

$$\left(\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)}\right)^2 = (12+03)^2-4(02)(13) = (12-03)^2-4(01)(23),$$

so hat man auch

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)}\right)^2 &= (02-13)^2+(12+03+02+13)(12+03-02-13)\\ &= (01-23)^2+(12-03+01+23)(12-03-01-23).\end{aligned}$$

Der abgeleitete Ausdruck führt zur Transformation eines Doppelintegrals, analog den von *Jacobi* in Bd. 8 und 15 dieses Journals behandelten Fällen, in denen zwei Doppelintegrale von gleicher Form in einander transformirt werden. Hierzu betrachte man die Coefficienten p und q als Functionen neuer Variabeln wz, in Bezug auf welche f und φ die Formen annehmen sollen

$$f = rwz+r_1w+r_2z+r_3 = 0,$$
$$\varphi = swz+s_1w+s_2z+s_3 = 0.$$

Alsdann werden die Coefficienten r und s in ähnlicher Weise abhängig von x und y, wie p und q von w und z, und in der Gleichung

$$\int \frac{dx\,dy}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(wz)}} = \int \frac{dw\,dz}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)}}$$

---

*) Dass die *Jacobi*sche Form, bei welcher der Grad des Zählers „tribus inferior quam summa ordinum $f\varphi$“ sein soll, in solchen Fällen ihre allgemeine Gültigkeit verliere, ist von *Kronecker* hervorgehoben und zugleich betont worden, „dass alsdann ebenfalls gewisse, den *Jacobi*schen Relationen entsprechende Beziehungen abgeleitet werden können“. Siehe Berliner Monatsberichte 1865, S. 689 f.

finden sich die Variabeln getrennt, wenn man

$$\left(\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(wz)}\right)^2 = R(\overset{4}{x}\overset{4}{y}), \quad \left(\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xy)}\right)^2 = S(\overset{4}{w}\overset{4}{z})$$

substituirt. Selbstverständlich gehen obiger Gleichung die analog gebildeten

$$\frac{dw\,dx}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(yz)}} = \frac{dy\,dz}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(wx)}} \quad \text{und} \quad \frac{dx\,dz}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(wy)}} = \frac{dw\,dy}{\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(xz)}}$$

parallel.

Aus der Theorie der elliptischen Functionen ist bekannt, dass für

$$x = \left(\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta(u)}\right)^2, \quad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x(\vartheta_2^2 - \vartheta_3^2.x)(\vartheta_3^2 - \vartheta_2^2.x)$$

oder

$$du = \frac{dx}{\sqrt{4x(\vartheta_2^2 - \vartheta_3^2.x)(\vartheta_3^2 - \vartheta_2^2.x)}}$$

wird. Ebenso erhält man für

$$x = \left(\frac{\vartheta_1(uv)}{\vartheta(uv)}\right)^2, \quad y = \left(\frac{\vartheta_2(uv)}{\vartheta(uv)}\right)^2,$$

wo der Bequemlichkeit halber (siehe *Rosenhain*, Preisschrift S. 422)

$$\varphi_{00}(uv) = \vartheta(ui, vi), \quad \varphi_{10}(uv) = \frac{1}{i}\vartheta_1(ui, vi), \quad \varphi_{20}(uv) = \vartheta_2(ui, vi)$$

gesetzt ist,

$$\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} = \frac{4}{\varphi_{11}}\sqrt{xy(\varphi_{20}^2 - \varphi_{30}^2.x - \varphi_{00}^2.y)(\varphi_{22}^2 - \varphi_{32}^2.x - \varphi_{02}^2.y)(\varphi_{23}^2 - \varphi_{33}^2.x - \varphi_{03}^2.y)}$$

oder

$$du\,dv = \frac{dx\,dy}{\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)}}.$$

Bestimmt man nun die constanten Coefficienten in den Functionen f und φ so, dass

$$\left(\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)}\right)^2 = \left(\frac{\partial(f\varphi)}{\partial(wz)}\right)^2 = R(\overset{4}{x}\overset{4}{y}),$$

so hat man auch

$$\int du\,dv = \int \frac{dw\,dz}{\sqrt{S(\overset{4}{w}\overset{4}{z})}}.$$

Wenn ein Ausdruck $F(xy)\,dx\,dy$ doppelt integrirt werden soll, so pflegt man den Umfang des Doppelintegrals durch Angabe des Bereichs

zu bestimmen, innerhalb dessen x und y variiren sollen, ebenso wie bei einfacher Integration das Integral $\int Fx\,dx$ dadurch zu einem ***bestimmten*** Integrale wird, dass die Grenzen oder der Integrationsweg vorgeschrieben werden. Als ***unbestimmtes*** Integral gilt die Function $u+$**const.**, welche der Differentialformel $du = Fx\,dx$, mit anderen Worten der Gleichung $\frac{\partial u}{\partial x} = Fx$ genügt. In analoger Weise können wir von einem ***unbestimmten*** Doppelintegrale sprechen, wenn zwei Functionen u und v von x und y bekannt sind, welche der Differentialformel

$$du\,dv = F(xy)\,dx\,dy,$$

mit anderen Worten der Relation

$$\frac{\partial(uv)}{\partial(xy)} = F(xy)$$

genügen. Und wie man das einfache bestimmte Integral — von speciellen Grenzwerthen abgesehen — in der Regel am bequemsten aus dem unbestimmten ableitet, so wird auch der Uebergang zu einem Doppelintegrale mit bestimmtem Integrationsbereiche in der reducirten Form $\int\int du\,dv = \int u\,dv$ in der Regel bequemer zu bewerkstelligen sein als bei $\int\int F(xy)\,dx\,dy$.

Bei dieser Reduction hat man als charakteristisch zu beachten, dass, während beim einfachen Integral die Function u bis auf eine Constante bestimmt ist, an Stelle von u und v zwei beliebige Functionen $u'v'$ treten können, für welche die Gleichung $\frac{\partial(u'v')}{\partial(uv)} = 1$ erfüllt ist. Bezeichnet man daher durch φ und ψ zwei ***willkürliche*** Functionen, so ergiebt sich

$$u' = \varphi(uv), \quad v' = \psi u' + \int \frac{dv}{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right]},$$

wenn in dem partiellen Differentialquotienten $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right]$ u durch u' eliminirt worden ist. Auch können hier uv und $u'v'$ vertauscht werden. Analog lässt sich die unbestimmte Integration der Differentialformel

$$du\,dv = F(xy)\,dx\,dy \quad \text{oder} \quad \frac{\partial(uv)}{\partial(xy)} = F(xy)$$

im allgemeinsten Falle auf eine Quadratur zurückführen mittelst der Gleichungen

$$u = \varphi(xy), \quad v = \psi u + \int \left[\frac{F(xy)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \right] dy,$$

wenn unter dem Integralzeichen in $\left[\frac{F(xy)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \right]$ x durch u eliminirt wird.

Wenn bei einem einfachen Integrale $\int_{x_0}^{x_1} F(x)dx$ die Grenzen gegeben sind, so hat man noch den Integrationsweg festzustellen, um den Werth des Integrals ohne Vieldeutigkeit zu erhalten. Für $x = t+ui$ geschieht dies durch eine reelle Gleichung $\varphi(tu) = 0$, welche für $t_0 u_0$ und $t_1 u_1$ erfüllt sein muss; man weiss, dass, von singulären Punkten abgesehen, eine Variation von φ auf den Werth des Integrals ohne Einfluss bleibt. An Stelle der Gleichung $\varphi = 0$ können t und u auch als Functionen einer unabhängigen reellen Variabeln p gegeben sein, die innerhalb des Integrals von p_0 bis p_1 wächst. Man wird demnach sagen können: um das *einfache* Integral zu einem *bestimmten* zu machen, hat man zunächst ein zusammenhängendes Gebiet von *einer* Dimension aus dem *zwei*dimensionalen Gesammtgebiete der complexen Werthe von x auszuscheiden, etwa unter dem Bilde der durch die Gleichung $\varphi(tu) = 0$ gegebenen — unbegrenzten oder geschlossenen — Curve, und dann auf dieser Curve die Strecke von x_0 bis x_1 zur Integration zu benutzen.

Um Entsprechendes für *Doppelintegrale* $\iint F(x\,y)\,dx\,dy$ leisten zu können, wird man ein zusammenhängendes — zunächst unbegrenztes — Gebiet von *zwei* Dimensionen aus dem *vier*dimensionalen Gesammtgebiete complexer Werthe von x und y auszusondern, und auf demselben durch eine Curve oder *ein*dimensionale Begrenzung denjenigen Gebietstheil zu definiren haben, über welchen die Integration der Function $F(xy)$ sich erstrecken soll. Ein solches unbegrenztes Gebiet liefert z. B. der Complex der reellen Werthe von $x = t+ui$ und $y = v+wi$, charakterisirt durch die beiden Gleichungen $u = 0$ und $w = 0$; in diesem Complexe ist dann mit Hülfe einer (geschlossenen resp. unbegrenzten) Grenzcurve $\chi(tv) = 0$ der eigentliche Integrationsbereich zu bestimmen. Im allgemeinen Falle wird das unbegrenzte (geschlossene) zweidimensionale Gebiet dadurch gewonnen, dass die reellen Grössen $tuvw$ zwei Gleichungen $\varphi(tuvw) = 0$ und $\psi(tuvw) = 0$ erfüllen sollen, mittelst deren zwei der vier Variabeln durch die beiden

anderen ausgedrückt werden können, oder dass diese vier Variabeln als eindeutige Functionen zweier unabhängigen reellen Variabeln p und q gegeben sind. Die Grenzcurve für das eigentliche Integrationsgebiet wird dann durch eine Gleichung $\chi(pq) = 0$ zwischen den beiden unabhängigen Variabeln definirt, dergestalt, dass die Ungleichung $\chi < 0$ den Integrationsbereich umfasst.

Häufig wird indess diese Grenzcurve dadurch bestimmt sein, dass die Werthe, welche die (complexe) Variable x an der Grenze annehmen soll, nebst den zugehörigen Werthen der zweiten Integrationsvariabeln y gegeben sind. Mit anderen Worten, für die Grenzwerthe soll eine Gleichung $y = fx$ bestehen, in welcher x die durch $\chi(tu) = 0$ vorgeschriebenen Werthe durchlaufen soll. Ist nun fx im engeren Sinne Function der complexen Variabeln x, so werden dadurch v und w als Functionen von t und u bestimmt, welche den bekannten Differentialrelationen

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{\partial w}{\partial t},$$

folglich

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$$

genügen. Es würde nun an sich nichts im Wege stehen, durch $y = fx$ oder die entsprechenden Gleichungen $v = \varphi(tu)$, $w = \psi(tu)$ ein unbegrenztes zweidimensionales Gebiet zu definiren, in welchem die gegebene Grenzcurve $\chi(tu) = 0$ enthalten ist, und auf diese Weise das Doppelintegral zu einem völlig *bestimmten* zu machen. Man sieht aber leicht, dass in diesem Falle die Functionaldeterminante $\frac{\partial(xy)}{\partial(tu)}$ und damit der Werth des bestimmten Integrals bei Einführung der reellen Variabeln *tu identisch* verschwindet.

Uebrigens ist aus der Theorie des logarithmischen Potentials bekannt, dass, wenn die Werthe gegeben sind, welche v und w längs der Grenzcurve $\chi(tu) = 0$ annehmen, während im Innern (auf einer Seite) derselben überall

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$$

sein soll, dadurch die stetig variablen Functionen $v = \varphi(tu)$ und $w = \psi(tu)$, und somit y, vollkommen bestimmt sind. Dabei zeigt sich, dass, wenn f_1 und f_2 zwei willkürliche Functionen bedeuten, und

$$v = \tfrac{1}{2}\{f_1(t+ui) + f_1(t-ui)\},$$

sowie

$$w = \frac{1}{2i}\{f_2(t+ui)-f_2(t-ui)\}$$

als reelle Integrale der Potentialgleichung ausgedrückt werden, die Gleichung $y = fx$ im Sinne des Functionsbegriffs complexer Variabeln nur dann hervorgeht, wenn die längs der Grenzcurve gegebenen Werthe von v und w so beschaffen sind, dass $f_1 = f_2$, mit anderen Worten, dass die Ausdrücke

$$v\,du+w\,dt \quad \text{oder} \quad v\,dt-w\,du$$

vollständige Differentiale werden. Ist dies *nicht* der Fall, so bleiben gleichwohl $v = \varphi(tu)$ und $w = \psi(tu)$ die Gleichungen für ein zweidimensionales Integrationsgebiet, an dessen Begrenzung die Integrationsvariabeln x und y gegebene complexe Werthe annehmen, und alle übrigen zulässigen Integrationsgebiete werden durch Variirung der Functionen φ und ψ hervorgehen, wenn dabei nur die der Grenzgleichung $\chi(tu) = 0$ entsprechenden Werthe ungeändert bleiben. Dabei wird sich nach Analogie der einfachen Integrale herausstellen, dass eine solche Variation der Functionen φ und ψ erst dann von Einfluss auf den Werth des bestimmten Doppelintegrals werden kann, wenn gewisse singuläre Stellen überschritten werden *).

Die vorstehenden Andeutungen mögen genügen, um zu zeigen, wie man bei Doppelintegralen mit complexem Integrationswege zur Reduction auf reelle Variabilität gelangen könne.

---

*) In Bd. II der Mathematischen Annalen S. 304 hat Hr. *Nöther* „beiläufig bemerkt, dass schon die Doppelintegrale (algebraischer Differentialausdrücke) die Eigenschaft haben, bei stetig veränderten Integrationsgebieten *zwischen denselben Grenzen* im Allgemeinen sich stetig ändernde Werthe zu geben".

Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires.

(Par M. *S. Pincherle* à Bologne.)

Il n'est peut-être pas sans intérêt d'énoncer un théorème qui donne une condition nécessaire à laquelle doivent satisfaire les coefficients d'une série de puissances, intégrale d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels. On aborde ainsi pour ces intégrales une question analogue à celles qu'ont étudiées *Eisenstein* et *Heine* pour les fonctions algébriques, M. *Tchebicheff* pour les fonctions composées d'un nombre fini de fonctions algébriques, exponentielles et logarithmiques, et M. *Gomes-Teixeira* pour les intégrales des équations différentielles du premier ordre.

Soit une équation linéaire du $m^{\text{ième}}$ ordre

$$(1.) \qquad \sum_{h=0}^{m} x^h (a_{h0} + a_{h1} x + \cdots + a_{hp} x^p) \varphi^{(h)}(x) = 0, \quad (a_{m0} = 1)$$

où a_{hk} sont des nombres entiers, et soit

$$(2.) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\varrho+n}, \quad (c_0 = 1)$$

une intégrale de cette équation. On sait que ϱ doit être une racine de l'équation déterminante

$$(3.) \quad D(\varrho) = \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-m+1) + a_{m-1,0}\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-m+2) + \cdots + a_{10}\varrho + a_{00} = 0,$$

et je me bornerai pour le moment au cas le plus ordinaire, où cette équation est irréductible et la différence de deux de ses racines n'est pas un nombre entier.

Cela posé, je me propose de démontrer le théorème suivant:

„Les coefficients c_n de la série (2.) sont des nombres algébriques, appartenant au domaine de rationalité défini par l'équation (3.).“

„Les coefficients des puissances de ϱ sont, dans ces nombres, des fractions qui, réduites à la plus simple expression, ne contiennent au déno-

minateur que des facteurs premiers p_n tels que la limite de $\frac{p_n}{n^{m^2}}$, pour $n=\infty$, est un nombre nécessairement fini."

A cet effet, j'indique par $E(\varrho)$, $E_1(\varrho)$, ... des nombres algébriques de la forme

$$k_0+k_1\varrho+\cdots+k_{m-1}\varrho^{m-1}$$

où les coefficients k_0, k_1, ... sont des nombres entiers, et par $F(\varrho)$, $F_1(\varrho)$, ... des nombres algébriques de la même forme, mais où les coefficients sont fractionnaires.

Les coefficients c_n de la série (2.) sont liés par une relation récurrente, et l'on aperçoit aisément que cette relation peut se mettre sous la forme

$$D(\varrho+n)c_n = E_1(\varrho)c_{n-1}+E_2(\varrho)c_{n-2}+\cdots+E_p(\varrho)c_{n-p}.$$

Or il est facile de vérifier que les premiers coefficients sont des nombres de la forme $F(\varrho)$; supposons qu'il en soit de même jusqu'au coefficient c_{n-1}, l'on aura

$$D(\varrho+n)c_n = E_1(\varrho)F_{n-1}(\varrho)+E_2(\varrho)F_{n-2}(\varrho)+\cdots+E_p(\varrho)F_{n-p}(\varrho),$$

ou, plus simplement, puisque le second membre est de la forme $F(\varrho)$:

$$D(\varrho+n)c_n = \bar{F}(\varrho).$$

Soit R_n le résultant des formes $D(\varrho)$, $D(\varrho+n)$; R_n n'est pas nul puisque la différence de deux racines de (3.) ne peut, par hypothèse, être un nombre entier. On sait qu'il est possible de déterminer deux fonctions entières à coefficients entiers de ϱ, et de degré $m-1$, $E_n(\varrho)$ et $E'(\varrho)$, telles que

$$D(\varrho+n)E_n(\varrho)-D(\varrho)E''(\varrho) = R_n,$$

d'où, par l'équation (3.), il résulte

$$\frac{1}{D(\varrho+n)} = \frac{E_n(\varrho)}{R_n}$$

et par conséquent

$$c_n = \frac{\bar{F}(\varrho)E_n(\varrho)}{R_n} = F_n(\varrho).$$

Cette formule démontre d'abord que si c_1, c_2, ... c_{n-1} sont des nombres de la forme $F(\varrho)$, il en est de même de c_n. En outre, on voit que $F_n(\varrho)$ contient, dans les dénominateurs de ses coefficients, le facteur R_n en plus que $F_{n-1}(\varrho)$; de même $F_{n-1}(\varrho)$ contiendra le facteur R_{n-1} en dénominateur en plus

que $F_{n-2}(\varrho)$, et ainsi de suite. Il en résulte que c_n pourra s'écrire

$$c_n = \frac{\bar{E}_n(\varrho)}{R_1 R_2 \dots R_n}.$$

Mais le résultant R_n est du degré m dans les coefficients de $D(\varrho+n)$, lesquels à leur tour sont de degré m en n; par conséquent R_n contient n au degré m^2 au plus, et peut s'écrire

$$R_n = e_0 n^{m^2} + e_1 n^{m^2-1} + \dots + e_{m^2},$$

où e_0, e_1, ... sont des nombres entiers. Le plus grand facteur premier p_n de R_n sera donc

$$p_n \leqq |e_0| n^{m^2} + |e_1| n^{m^2-1} + \dots + |e_{m^2}|$$

et par conséquent $\frac{p_n}{n^{m^2}}$ aura certainement une limite finie pour $n = \infty$, c. q. f. d.

Bemerkung über elliptische Integrale.

(Von Herrn *Woldemar Heymann* in Dresden.)

In einer Nachschrift zur „Anzeige von *Legendre,* Théorie des Fonctions Elliptiques", Troisième Supplément (vergl. dieses Journal, Bd. 8, p. 413—417) giebt *Jacobi* die Darstellung des elliptischen Integrales erster Gattung mit imaginärem Modul in der Form $P+Q\sqrt{-1}$.

Er findet daselbst *)

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(e+f\sqrt{-1})\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{(1-e)^2+ff}-e+1}} \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+k\lambda x)(1+kx)(1-\lambda x)}}$$

$$+\sqrt{-1}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{(1-e)^2+ff}+e-1}}{\sqrt{2}(\sqrt{(1-e)^2+ff}-e+1)} \int_0^{x} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+k\lambda x)(1+kx)(1-\lambda x)}},$$

worin

$$k = \frac{\sqrt{(1-e)^2+ff}+e-1}{\sqrt{ee+ff}-e}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{(1-e)^2+ff}+e-1}{\sqrt{ee+ff}+e}.$$

Die Veränderlichen x und φ stehen in folgendem Zusammenhang

$$\sqrt{x} = \frac{(b'+c')\sin\varphi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\varphi}+\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},$$

und hierin bedeutet

$$b^2 = e+f\sqrt{-1}, \quad c^2 = e-f\sqrt{-1},$$
$$b' = \sqrt{1-bb}, \quad c' = \sqrt{1-cc}.$$

Bei Gelegenheit der Untersuchung von *Abel*schen Transcendenten, welche unter der Quadratwurzel solche ganzen Functionen besitzen, die den sogenannten reciproken Gleichungen entsprechen, trat mir das oben be-

*) Der Factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$, welcher in dem Ausdruck für das zu entwickelnde Integral vorkommt, ist erst später in dem von *Borchardt* herausgegebenen Bd. I von *Jacobi*s Werken, p. 382 berichtigend hinzugefügt worden.

merkte Integral mit complexem Modul ebenfalls entgegen, *und es ergab sich für dasselbe auf dem von mir eingeschlagenen Wege nachstehende Zerlegung in die Form* $P+Q\sqrt{-1}$:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(e+f\sqrt{-1})\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2f}} \int_0^{w} \frac{(1+w\sqrt{-1})dw}{\sqrt{w\left[1+2\frac{e}{f}w-w^2\right]\left[1+2\frac{e-1}{f}w-w^2\right]}},$$

wobei die Veränderlichen φ *und* w *durch die Gleichung*

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{f}{2w}\left[1+2\frac{e}{f}w-w^2\right]$$

an einander gebunden sind.

Die Richtigkeit des Resultates wird leicht erprobt, wenn man in das gegebene Integral direct die letzte Substitution einführt, also an Stelle von φ durchweg w bringt.

Es ist wohl augenscheinlich, dass die *Jacobi*schen Ausdrücke eine viel complicirtere Gestalt besitzen; überdies wird die Rechnung mit denselben noch dadurch erschwert, dass die verbindende Substitution, d. h. die Gleichung zwischen x und φ in imaginärer Form (von der sie allerdings befreit werden könnte) auftritt.

Dass trotzdem zwischen der *Jacobi*schen Formel und der zuletzt aufgeschriebenen ein innerer und wesentlicher Unterschied nicht stattfindet, wird erkannt, wenn man in jener die Substitution

$$x = \frac{w}{\sqrt{k\lambda}}$$

macht, gehörig reducirt und allerorts die Parameter e und f einführt. — Dann entsteht die neue Formel buchstäblich.

In Anbetracht, dass der erwähnten Transformation eine fundamentale Bedeutung nicht abzusprechen ist, habe ich mir erlaubt, die vereinfachte Darstellung mitzutheilen.

Dresden, Juli 1887.

Ueber die Integraldarstellung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe.

(Von Herrn *Paul Schafheitlin.*)

Herr *Pochhammer* hat in einer ausführlichen Abhandlung (dieses Journal, Bd. 102, S. 76–159) die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten durch mehrfache bestimmte Integrale integrirt. Es dürfte vielleicht nicht uninteressant sein, das Hauptresultat jener Arbeit in kurzer übersichtlicher Form darzustellen und gleichzeitig den Zusammenhang zwischen jenem Integrale und dem schon früher von Herrn *Goursat* *) ermittelten vor Augen zu führen.

Sei

$$(1.)\qquad \sum_{p=0}^{n-1} v^{p-1}(a_p v - b_p)\frac{d^p \varphi(v)}{dv^p} = 0, \quad b_0 = 0;$$

$$(2.)\qquad v(v-1)\frac{d\psi(v)}{dv} - (\tau v - \sigma)\psi(v) = 0,$$

wo a_p, b_p, τ, σ von v unabhängige Grössen bedeuten; ist x ebenfalls von v unabhängig, so folgt:

$$(3.)\qquad \sum_{p=0}^{n-1} v^{p-1}(a_p x v - b_p)\frac{d^p \varphi(vx)}{dv^p} = 0.$$

Nun setze man:

$$(4.)\qquad y(x) = \int_g^h \psi(v)\varphi(vx)dv,$$

wo g und h von x unabhängig sind. Dann ist:

$$(5.)\qquad \begin{cases} x^p \dfrac{d^p y}{dx^p} = \displaystyle\int_g^h v^p \psi \frac{d^p \varphi}{dv^p} dv \\ \qquad = \left[v^p \psi \dfrac{d^{p-1}\varphi}{dv^{p-1}}\right]_g^h - \displaystyle\int_g^h \left(p\psi + v\frac{d\psi}{dv}\right) v^{p-1} \frac{d^{p-1}\varphi}{dv^{p-1}} dv. \end{cases}$$

*) Annales de l'École Normale, série II, tom. XII, pag. 281.

Wendet man (2.) auf das letzte Integral an, so folgt:

$$(6.) \qquad x^p \frac{d^p y}{dx^p} = \left[v^p \psi \frac{d^{p-1}\varphi}{dv^p} \right]_g^h + \int_g^h \frac{(\tau+p)v-(\sigma+p)}{1-v} \psi v^{p-1} \frac{d^{p-1}\varphi}{dv^{p-1}} dv.$$

Setzt man in (5.) $p-1$ an Stelle von p und addirt (5.) und (6.), nachdem man dieselben mit zwei unbestimmten Coefficienten $\varkappa_{p-1}$ und λ_p multiplicirt hat, so ergiebt sich:

$$(7.) \quad \begin{cases} \varkappa_{p-1} x^{p-1} \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \lambda_p x^p \frac{d^p y}{dx^p} \\ = \lambda_p \left[v^p \psi \frac{d^{p-1}\varphi}{dv^{p-1}} \right]_g^h + \int_g^h \frac{\{\lambda_p(\tau+p)-\varkappa_{p-1}\}v-\{\lambda_p(\sigma+p)-\varkappa_{p-1}\}}{1-v} \psi v^{p-1} \frac{d^{p-1}\varphi}{dv^{p-1}} dv. \end{cases}$$

Nun bestimme man $\varkappa$ und λ so, dass:

$$\lambda_p(\tau+p)-\varkappa_{p-1} = (\tau-\sigma)x a_{p-1},$$
$$\lambda_p(\sigma+p)-\varkappa_{p-1} = (\tau-\sigma)b_{p-1}.$$

Dann folgt:

$$(8.) \quad \begin{cases} \lambda_p = a_{p-1}x-b_{p-1}, \\ \varkappa_{p-1} = (\sigma+p)a_{p-1}x-(\tau+p)b_{p-1}. \end{cases}$$

Summirt man (7.) von $p=1$ bis n, so erhält man:

$$(9.) \qquad \sum_{p=0}^{n} x^{p-1}(\varkappa_p+\lambda_p) \frac{d^p y}{dx^p} = \frac{1}{x}\left[v\psi \sum_{p=1}^{n} \lambda_p v^{p-1} \frac{d^{p-1}\varphi(vx)}{dv^{p-1}} \right]_g^h,$$

denn das Integral in (7.) verschwindet wegen (3.) für jeden Werth von v; es ist in (9.) zu setzen:

$$(10.) \qquad \lambda_0 = \varkappa_n = 0.$$

Bestimmt man nun g und h derart, dass die rechte Seite in (9.) verschwindet, so genügt y einer Gleichung $n$ten Grades, welche (1.) analog gebildet ist. Man setze:

$$\varkappa_p+\lambda_p = c_p x-d_p,$$

so ist:

$$(11.) \quad \begin{cases} c_p = (\sigma+p+1)a_p+a_{p-1}; \quad c_0 = (\sigma+1)a_0, \\ d_p = (\tau+p+1)b_p+b_{p-1}; \quad d_0 = 0. \end{cases}$$

Sind a, b, σ, τ gegeben, so werden durch (11.) c und d eindeutig bestimmt; sind umgekehrt c und d gegeben, so lassen sich a, b, σ, τ bestimmen. Um dies zu zeigen, multiplicire man die erste Gleichung (11.) mit $(-1)^p \frac{\Pi(\sigma+p)}{\Pi\sigma}$ und addire von 0 bis n, so folgt:

$$(12.) \qquad \sum_{p=0}^{n} (-1)^p(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+p)c_p = 0.$$

Nachdem aus dieser Gleichung $n$ten Grades σ bestimmt ist, ergiebt sich a_s aus der Gleichung:

$$(13.)\quad \sum_{p=0}^{s}(-1)^p(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+p)c_p = (-1)^s(\sigma+1)(\sigma+2)\ldots(\sigma+s+1)a_s.$$

Für τ und b_s erhält man die analogen Gleichungen:

$$(14.)\quad \sum_{p=1}^{n}(-1)^p(\tau+2)(\tau+3)\ldots(\tau+p)d_p = 0,$$

$$(15.)\quad \sum_{p=1}^{s}(-1)^p(\tau+2)(\tau+3)\ldots(\tau+p)d_p = (-1)^s(\tau+2)(\tau+3)\ldots(\tau+s+1)b_s.$$

Der Zusammenhang zwischen den Coefficienten der ursprünglichen Differentialgleichung und denen der neuen:

$$(16.)\quad \sum_{p=0}^{n} x^{p-1}(c_p x - d_p)\frac{d^p y}{dx^p} = 0; \quad d_0 = 0,$$

stellt sich sehr einfach dar, wenn man von derjenigen Form von (1.) ausgeht, welche ich in meiner Dissertation *) die Normalform genannt habe; man überzeugt sich leicht, dass dann auch (16.) in der Normalform auftritt.

Sind $k_1, k_2, \ldots k_n$ die singulären Punkte der Differentialgleichung, $\varepsilon_{\mu,\nu}$ für $\mu = 1, 2, \ldots n;\ \nu = 1, 2, \ldots \mu$ constante Grössen und bezeichnet man mit $\mathfrak{K}_\nu$ die elementare symmetrische Function νten Grades der Grössen k und mit $\mathfrak{S}(\tau, \varepsilon_\mu)$ die elementare symmetrische Function τten Grades der Elemente der μten Gruppe: $\varepsilon_{\mu,1}, \varepsilon_{\mu,2}, \ldots \varepsilon_{\mu,\mu}$ und ist:

$$(17.)\quad \mathfrak{z}(\lambda, \mu) = \sum_{\nu=1}^{\lambda}(-1)^{\lambda-\nu}\frac{\nu^\mu}{\nu!(\lambda-\nu)!} \qquad (\lambda \geqq 1);$$

ferner:

$$(18.)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}(\varrho-\lambda, \varepsilon_\varrho) = \sum_{\mu=1}^{\varrho}\mathfrak{z}(\lambda, \mu)\mathfrak{S}(\varrho-\mu, \varepsilon_\varrho) & (\lambda \geqq 1), \\ \mathfrak{B}(\varrho, \varepsilon_\varrho) = \mathfrak{S}(\varrho, \varepsilon_\varrho), \end{cases}$$

so ist:

$$(19.)\quad \sum_{p=0}^{n}\frac{d^p y}{dx^p}\left\{\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^\nu \mathfrak{B}(n-p, \varepsilon_{n-\nu})\mathfrak{K}_\nu x^{p-\nu}\right\} = 0$$

die erwähnte Normalform der Differentialgleichungen $n$ter Ordnung.

Aus (17.) folgt sofort:

$$(20.)\quad \mathfrak{z}(\lambda, \mu+1) = \lambda\mathfrak{z}(\lambda, \mu)+\mathfrak{z}(\lambda-1, \mu) \qquad (\lambda > 1),$$

---

*) Ueber eine gewisse Klasse linearer Differentialgleichungen. Halle a. S. 1885.

ferner:

$$(21.) \qquad \mathfrak{z}(\lambda,\ 1) = 0; \quad \mathfrak{z}(1,\ 1) = 1$$

und hieraus in Verbindung mit (20.):

$$(22.) \qquad \mathfrak{z}(\lambda, \mu) = 0 \qquad (\lambda > \mu)$$

und

$$(23.) \qquad \mathfrak{z}(\lambda,\ \lambda) = 1.$$

Wegen (22.) darf in (18.) für die untere Grenze der Summe λ gesetzt werden. Schliesslich folgt aus (17.):

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}(\lambda+1,\ \mu+1) &= \sum_{\nu=1}^{\lambda+1}(-1)^{\lambda-\nu+1}\frac{\nu^{\mu+1}}{\nu!(\lambda-\nu+1)!}\\ &= \sum_{\nu=1}^{\lambda+1}\frac{(-1)^{\lambda-\nu+1}}{(\nu-1)!(\lambda-\nu+1)!}\sum_{\varkappa=0}^{\mu}\frac{\mu!}{\varkappa!(\mu-\varkappa)!}(\nu-1)^{\varkappa}\\ &= \sum_{\varkappa=0}^{\mu}\frac{\mu!}{\varkappa!(\mu-\varkappa)!}\sum_{\nu=1}^{\lambda+1}\frac{(-1)^{\lambda-\nu+1}(\nu-1)^{\varkappa}}{(\nu-1)!(\lambda-\nu+1)!}.\end{aligned}$$

Da für $\varkappa = 0$ die innere Summe verschwindet und deren Anfangsglied für jedes andere $\varkappa$, so folgt:

$$\mathfrak{z}(\lambda+1,\ \mu+1) = \sum_{\varkappa=1}^{\mu}\frac{\mu!}{\varkappa!(\mu-\varkappa)!}\sum_{\nu=1}^{\lambda}(-1)^{\lambda-\nu}\frac{\nu^{\varkappa}}{\nu!(\lambda-\nu)!}$$

oder

$$(24.) \qquad \mathfrak{z}(\lambda+1,\ \mu+1) = \mu!\sum_{\varkappa=1}^{\mu}\frac{\mathfrak{z}(\lambda,\ \varkappa)}{\varkappa!(\mu-\varkappa)!}.$$

Setzt man $\varepsilon_{\mu,\nu}+1$ an Stelle von $\varepsilon_{\mu,\nu}$ für jeden Werth von ν, so ergiebt sich leicht aus der Theorie der algebraischen Gleichungen die Formel:

$$(25.) \qquad \mathfrak{S}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_{\varrho}+1) = \sum_{\lambda=\mu}^{\varrho}\frac{\lambda!}{\mu!(\lambda-\mu)!}\mathfrak{S}(\varrho-\lambda,\ \varepsilon_{\varrho}).$$

Vermittelst (20.), (24.) und (25.) beweist man sofort die Richtigkeit der Formel:

$$(26.) \qquad \mathfrak{B}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_{\varrho}+1) = \mathfrak{B}(\varrho-\mu,\ \varepsilon_{\varrho})+(\mu+1)\mathfrak{B}(\varrho-\mu-1,\ \varepsilon_{\varrho}).$$

Um (1.) auf die Normalform der $(n-1)$ten Ordnung zu bringen, muss man setzen:

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{n-2} = 0;\ k_{n-1} = 1;$$

deswegen treten in (1.) nur die Elemente der letzten und vorletzten Gruppe auf; nennt man dieselben $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ und $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-2}$, so hat man zu setzen:

$$(27.) \qquad a_p = \mathfrak{B}(n-p-1,\ \alpha_\nu) = \sum_{\mu=1}^{n-1}\mathfrak{z}(p,\ \mu)\mathfrak{S}(n-\mu-1,\ \alpha_\nu) \qquad (p \geqq 1),$$

$$(28.) \qquad b_p = \mathfrak{B}(n-p-1,\ \varrho_\nu) = \sum_{\mu=1}^{n-2}\mathfrak{z}(p-1,\ \mu)\mathfrak{S}(n-\mu-2,\ \varrho_\nu) \qquad (p \geqq 2).$$

Aus (27.) folgt in Verbindung mit (11.):

$$c_p = \sum_{\mu=1}^{n-1} \{\mathfrak{z}(p, \mu)+(\sigma+p+1)\mathfrak{z}(p-1, \mu)\}\mathfrak{S}(n-\mu-1, \alpha_\nu) \qquad (p \geqq 2)$$

und vermöge (20.):

$$c_p = \sum_{\mu=1}^{n-1} \{\mathfrak{z}(p, \mu+1)+(\sigma+1)\mathfrak{z}(p, \mu)\}\mathfrak{S}(n-\mu-1, \alpha_\nu) \qquad (p \geqq 2)$$

oder wegen (21.):

$$(29.) \quad \begin{cases} c_p = \sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{z}(p, \mu)\mathfrak{S}(n-\mu, \alpha_\nu) \\ +\sum_{\mu=1}^{n-1} \mathfrak{z}(p, \mu)(\sigma+1)\mathfrak{S}(n-\mu-1, \alpha_\nu). \end{cases}$$

Setzt man

$$(30.) \quad \sigma+1 = \alpha_n$$

und bezieht alsdann $\mathfrak{S}$ statt auf $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ auf die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, so folgt nach einer bekannten Eigenschaft der symmetrischen Functionen aus (29.):

$$(31.) \quad c_p = \sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{z}(p, \mu)\mathfrak{S}(n-\mu, \alpha_\nu) = \mathfrak{B}(n-p, \alpha_\nu) \qquad (p \geqq 2).$$

Man überzeugt sich leicht durch (11.) von der Richtigkeit von (31.) auch für $p = 0$ und 1. Setzt man

$$(32.) \quad \tau+2 = \varrho_{n-1},$$

so folgt analog aus (28.):

$$(33.) \quad d_p = \mathfrak{B}(n-p, \varrho_\nu);$$

aus (31.) und (33.) folgt, dass (16.) thatsächlich in der Normalform auftritt.

Es erübrigt noch, die Grenzen g und h zu bestimmen. Wegen (30.) und (32.) folgt aus (2.):

$$\psi(v) = v^{\alpha_n-1}(1-v)^{\varrho_{n-1}-\alpha_n-1},$$

abgesehen von einer willkürlichen Constanten.

Man überzeugt sich sofort, dass

$$v\psi \sum_{p=1}^{n} \lambda_p v^{p-1} \frac{d^{p-1}q(vx)}{dv^{p-1}}$$

für $v = 0$, 1 oder ∞ verschwindet (für $v = 1$ verschwindet die Summe wegen (3.) identisch), sobald das Integral (4.) selbst einen endlichen Werth

besitzt; bei Einführung dieser Grenzen ist somit (4.) eine Lösung von (16.), sobald es überhaupt endlich ist.

Doch übersieht man sofort, dass eine der Grenzen auch eine Function von x sein kann, wenn nur für diese Grenze

$$\varphi(vx), \quad \frac{d\varphi}{dx}, \quad \ldots \quad \frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}$$

verschwindet; dies kann für den Werth

$$(35.) \qquad v = \frac{1}{x}$$

stattfinden. Denn setzt man:

$$(36.) \qquad \varphi(v) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} z_\lambda (1-v)^{r+\lambda},$$

so ergiebt sich zur Bestimmung von r aus (1.):

$$(37.) \quad r(r-1)\ldots(r-n+3)(r-n+2+a_{n-2}-b_{n-2}) = 0.$$

Ist $r = 0, 1, \ldots n-3$, so genügt $\varphi(vx)$ für $v = \frac{1}{x}$ den obigen Bedingungen nicht. Die letzte Klammer geht vermöge (22.), (27.) und (28.) über in:

$$r-n+2+\mathfrak{S}(1,\alpha_1,\ldots\alpha_{n-1})-\mathfrak{S}(1,\varrho_1,\ldots\varrho_{n-2})+\mathfrak{z}(n-2,n-1)-\mathfrak{z}(n-3,n-2)=0$$

oder nach (20.) und (23.):

$$(38.) \qquad r = \varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_{n-2}-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}).$$

Ist nun

$$(39.) \qquad r+1 > n,$$

so ist in (4.) auch die Grenze $\frac{1}{x}$ zulässig, vorausgesetzt, dass für $\varphi(vx)$ die an der Stelle $v = \frac{1}{x}$ mehrdeutige Lösung eingesetzt wird. Damit aber das Integral (4.) alsdann endlich ist, braucht nur die Bedingung

$$(40.) \qquad r+1 > 0$$

erfüllt zu sein; es lässt sich zeigen, dass man in der That sich von (39.) befreien kann.

Differentiirt man (16.), nämlich:

$$(41.) \qquad \sum_{p=0}^{n} x^{p-1}\{\mathfrak{B}(n-p,\ \alpha_\nu)\,x-\mathfrak{B}(n-p,\ \varrho_\nu)\}\frac{d^p y}{dx^p} = 0,$$

so folgt vermöge (26.):

$$(42.) \qquad \sum_{p=0}^{n} x^{p-1}\{\mathfrak{B}(n-p,\ \alpha_\nu+1)\,x-\mathfrak{B}(n-p,\ \varrho_\nu+1)\}\frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} = 0.$$

Hieraus erkennt man, dass $\frac{dy}{dx}$ eine Lösung derjenigen Differentialgleichung ist, welche aus (41.) dadurch entsteht, dass $\alpha_\nu+1$ und $\varrho_\nu+1$ an die Stelle von α_ν und ϱ_ν getreten sind. Bezeichnet man eine Lösung von (42.) mit $y_1(x)$

und differentiirt (4.), nämlich:

$$(43.) \qquad y(x) = \int_g^{\frac{1}{x}} v^{a_n-1}(1-v)^{\varrho_{n-1}-a_n-1}\varphi(vx)dv,$$

so erhält man, wenn (39.) erfüllt ist:

$$(44.) \qquad y_1(x) = \int_g^{\frac{1}{x}} v^{a_n}(1-v)^{\varrho_{n-1}-a_n-1}\varphi_1(vx)dv.$$

Für $\alpha'_\nu = \alpha_\nu+1$ und $\varrho'_\nu = \varrho_\nu+1$, die Elemente von φ_1, gilt alsdann die Bedingung:

$$\varrho'_1+\varrho'_2+\cdots+\varrho'_{n-2}-(\alpha'_1+\alpha'_2+\cdots+\alpha'_{n-1})+2 > n$$

oder

$$r'+1 > n-1.$$

Dieses Verfahren lässt sich so oft wiederholen, als das Integral endlich bleibt, und hieraus sieht man, dass für die Grenze $\frac{1}{x}$ nur die Bedingung (40.) nöthig ist.

Demnach können in:

$$(45.) \qquad y(x) = \int_g^h v^{a_n-1}(1-v)^{\varrho_{n-1}-a_n-1}\varphi(vx)dv$$

g und h zwei beliebige der Grössen 0, 1, ∞, $\frac{1}{x}$ bedeuten, sobald nur das Integral selbst endlich ist und bei der variablen Grenze $\frac{1}{x}$ die an der Stelle $v=\frac{1}{x}$ mehrdeutige Lösung für $\varphi(vx)$ substituirt wird.

Die an der Stelle $x=1$ mehrdeutige Lösung ist:

$$(46.) \qquad y(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} v^{a_n-1}(1-v)^{\varrho_{n-1}-a_n-1}\varphi(vx)dv,$$

wie sich leicht zeigt, wenn man setzt:

$$1-vx = u(1-x).$$

Wendet man (45.) auf sich selbst an, so folgt:

$$(47.) \qquad \begin{cases} y(x) = \int_{g_1}^{h_1}\int_{g_2}^{h_2}\cdots\int_{g_{n-1}}^{h_{n-1}}(1-xv_1v_2\ldots v_{n-1})^{-\alpha_1} \\ \times \prod_2^n v_{n-p+1}^{a_p-1}(1-v_{n-p+1})^{\varrho_{p-1}-a_p-1}dv_{n-p+1}, \end{cases}$$

wo als Grenzen 0, 1, ∞ für irgend eine Integration zu nehmen sind und ausserdem $\frac{1}{x.v_1 v_2 \dots v_{\nu-1}}$ für h_ν; doch ist zu bemerken, dass, wenn diese variable Grenze bei einer Integration auftritt, die Grenzen sämmtlicher folgenden Integrationen wegen (46.) 1 und die entsprechende variable Grenze sein müssen; dann ist, sobald das Integral endlich ist, (47.) eine Lösung von (41.). Für die Grenzen 0 und 1 ist (47.) schon von Herrn ***Goursat*** abgeleitet worden, für die anderen Grenzen nur für $n = 3$.

Setzt man in (47.):

$$(48.) \qquad v_{n-1} = \frac{1}{x v_1 v_2 \dots v_{n-2}} \cdot \frac{1}{t_{n-1}},$$

so gelten für t_{n-1} dieselben vier Grenzen wie für v_{n-1}, und man erhält bis auf einen constanten Factor, wenn für t_{n-1} wieder v_{n-1} geschrieben wird:

$$(49.) \quad \begin{cases} x^{\varrho_1 - 1} y(x) = \iint \dots \int (1 - x v_1 v_2 \dots v_{n-1})^{\varrho_1 - \alpha_2 - 1} (1 - v_{n-1})^{-\alpha_1} v_{n-1}^{\alpha_1 - \varrho_1} dv_{n-1} \\ \qquad\qquad \times \prod_3^n v_{n-p+1}^{\alpha_p - \varrho_1} (1 - v_{n-p+1})^{\varrho_{p-1} - \alpha_p - 1} dv_{n-p+1}. \end{cases}$$

Setzt man:

$$(50.) \quad \begin{cases} \alpha_p - \varrho_1 + 1 = \alpha'_p, \\ \varrho_p - \varrho_1 + 1 = \varrho'_p \ (p > 1); \quad 2 - \varrho_1 = \varrho'_1, \end{cases}$$

so geht das Integral (49.) in (47.) über mit Vertauschung von α_1 und α_2; diese Vertauschung ist unwesentlich, da die Grössen α unter sich und ϱ unter sich vertauscht werden können, ohne dass (41.) geändert wird. Man erkennt somit, dass $y(\alpha_\nu, \varrho_\nu, x)$ und $x^{1-\varrho_1} . y(\alpha'_\nu, \varrho'_\nu, x)$ Lösungen derselben Differentialgleichung sind. Wegen der Vertauschbarkeit der Elemente ϱ folgt hieraus, dass auch $y(\alpha_\nu, \varrho_\nu, x)$ und $x^{1-\varrho_\lambda} y(\alpha'_\nu, \varrho'_\nu, x)$ Lösungen derselben Differentialgleichung sind, wenn:

$$(51.) \quad \begin{cases} \alpha'_\nu = \alpha_\nu - \varrho_\lambda + 1, \\ \varrho'_\nu = \varrho - \varrho_\lambda + 1 \ (\alpha \gtrless \nu); \quad \varrho'_\lambda = 2 - \varrho_\lambda. \end{cases}$$

Diese Eigenschaft der Differentialgleichung (41.) lässt sich auch unabhängig von der Darstellung der Lösungen durch bestimmte Integrale unschwer beweisen.

Setzt man in (51.) $\lambda = n-1$, so ist nach (4.):

$$(52.) \qquad y(\alpha'_\nu, \varrho'_\nu, x) = \int_g^h v^{\alpha'_{n-1}} (1-v)^{\varrho'_{n-1} - \alpha'_n - 1} \varphi(\alpha'_\nu, \varrho'_\nu, x) dv.$$

Substituirt man in (52.)

$$vx = t,$$

so gehen die Grenzen 0, 1, ∞, $\frac{1}{x}$ über in 0, x, ∞, 1 und man erhält:

$$y(\alpha'_\nu,\ \varrho'_\nu,\ x) = x^{1-\varrho'_{n-1}} \int_{g_1}^{h_1} t^{\alpha'_n - 1}(t-x)^{\varrho'_{n-1}-\alpha'_n-1}\varphi(\alpha'_\nu,\ \varrho'_\nu,\ t)\,dt.$$

Nach der obigen Bemerkung folgt hieraus:

$$(53.)\qquad y(\alpha_\nu,\ \varrho_\nu,\ x) = \int_{g_1}^{h_1} t^{\alpha_n-\varrho_{n-1}}(t-x)^{-\alpha_n}\varphi(\alpha'_\nu,\ \varrho'_\nu,\ t)\,dt.$$

Dies ist die von Herrn *Pochhammer* *) gegebene Form, aus welcher sich ebenso wie oben ein $(n-1)$-faches Integral ergiebt, dessen zu integrirende Function lautet, wenn für t wieder v gesetzt wird:

$$(v_{n-1}-x)^{-\alpha_n} v_{n-1}^{\alpha_n-\varrho_{n-1}}(v_1-1)^{\varrho_1-\alpha_1-1}\prod_2^{n-1}(v_{p-1}-v_p)^{\varrho_p-\alpha_p-1}v_{p-1}^{\alpha_p-\varrho_p-1}.$$

Nimmt man 0, ∞, 1 und x resp. v_{n-1}, v_{n-2}, ... v_2 als Grenzen, so befriedigt das $(n-1)$-fache Integral die Gleichung (47.), sobald es endlich ist und sobald, wenn bei einer Integration die Grenze 1 auftritt, in allen folgenden Integrationen als Grenzen 1 und die variable Grenze gesetzt werden.

---

*) a. a. O. vergl. Formel (83.)—(86.).

Berlin, im December 1887.

Ueber einen Satz von *Dirichlet.*

(Von Herrn *A. Meyer* in Zürich.)

Wie schon *Dirichlet* selbst bemerkt hat, lässt sich der von ihm bewiesene Satz über die arithmetische Progression auch auf quadratische Formen ausdehnen: „. . . on prouve non seulement que toute forme quadratique renferme une infinité de nombres premiers, mais encore qu'elle en contient qui soient d'une forme linéaire quelconque compatible avec la forme quadratique donnée“ *). Die erste dieser Behauptungen ist von *Dirichlet* nur für einen Specialfall, allgemein aber von Herrn *H. Weber* bewiesen worden **), während für die zweite noch kein Beweis veröffentlicht zu sein scheint. In vorliegender Arbeit soll, in möglichst engem Anschluss an die *Weber*sche Abhandlung, diese Ergänzung beizubringen versucht werden.

1. Der zu beweisende Satz lautet genauer formulirt folgendermassen:

Jede eigentlich primitive binäre quadratische Form $ax^2+2bxy+cy^2$, *deren Determinante* $D=b^2-ac$ *kein Quadrat ist, stellt unendlich viele Primzahlen dar, welche zugleich in einer gegebenen mit den Charakteren des Geschlechts jener quadratischen Form verträglichen primitiven Linearform* $Mx+N$ *enthalten sind.*

Es genügt den Fall zu betrachten, dass M durch 16 und durch D theilbar ist. Es sei

$$M = 2^{\sigma} p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots,$$

wo $p_1, p_2, \ldots$ von einander verschiedene ungerade Primzahlen bedeuten, $\sigma, \pi_1, \pi_2, \ldots$ positive ganze Zahlen ($\sigma > 3$). Ferner seien $g_1, g_2, \ldots$ Primitivwurzeln für die Moduln $p_1^2, p_2^2, \ldots$ bezw., n eine relative Primzahl zu M; dann kann (D. § 131) stets gesetzt werden

*) Comptes rendus der Pariser Akademie 1840, t. X, 285.

**) Math. Annalen, Bd. XX, p. 301. Ich werde diese Abhandlung kurz mit W., die *Dirichlet*schen Vorlesungen über Zahlentheorie mit D. citiren.

$$n \equiv (-1)^\alpha 5^\beta \pmod{2^\sigma}, \quad n \equiv g_\varkappa^{\gamma_\varkappa} \pmod{p_\varkappa^{\pi_\varkappa}} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots),$$

wo die ***Indices*** α, β, $\gamma_\varkappa$ bezw. nach den Moduln 2, $2^{\sigma-2}$, $p_\varkappa^{\pi_\varkappa-1}(p_\varkappa-1)$ vollständig bestimmt sind. Sind nun (D. § 133) θ, η, $\varpi_\varkappa$ irgend welche Wurzeln der Gleichungen

$$\theta^2 = 1, \quad \eta^{2^{\sigma-2}} = 1, \quad \varpi_\varkappa^{p_\varkappa^{\pi_\varkappa-1}(p_\varkappa-1)} = 1,$$

so heisse das Product

$$\theta^\alpha \eta^\beta \varpi_1^{\gamma_1} \varpi_2^{\gamma_2} \ldots$$

ein ***Charakter*** der Zahl n (mod. M) und werde mit $\tau(n)$ bezeichnet. Die Anzahl der Charaktere von n für den Modul M ist $= 2^{\sigma-1} p_1^{\pi_1-1}(p_1-1)\cdots = \varphi(M)$. Dem Werthsysteme $\theta = \eta = \varpi_1 = \varpi_2 = \cdots = 1$ entspricht der ***Hauptcharakter***. Die den Werthsystemen $\theta = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, $\varpi_1 = \pm 1$, ... entsprechenden Charaktere mögen ***ambig***, die übrigen ***imaginär***, Charaktere τ und τ^{-1}, die Systemen von conjugirten Wurzeln θ, η, ϖ_1, ... und θ^{-1}, η^{-1}, ϖ_1^{-1}, ... entsprechen, ebenfalls ***conjugirt*** heissen. Die ambigen Charaktere sind sich selbst conjugirt.

Von den Formen der Determinante D sollen, wenn D negativ ist, nur die positiven in Betracht gezogen werden. Die Klassen der zur Determinante D gehörigen eigentlich primitiven Formen lassen sich durch Zusammensetzung aus einer gewissen Anzahl von Fundamentalklassen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_\nu$ erhalten (W. § 1 u. 2). Bezeichnet man die Zusammensetzung von Klassen in derselben Weise wie die Multiplication von Zahlen, so lässt sich jede Klasse Θ in die Form bringen

$$\Theta = \Theta_1^{s_1} \Theta_2^{s_2} \ldots \Theta_\nu^{s_\nu},$$

und man erhält jede Klasse ein- und nur einmal, wenn man $s_1, s_2, \ldots s_\nu$ vollständige Restsysteme bezw. nach den Moduln $n_1, n_2, \ldots n_\nu$ durchlaufen lässt, wo $n_\varkappa$ den Grad von $\Theta_\varkappa$ bedeutet, d. h. den kleinsten (positiven) Exponenten, für welchen $\Theta_\varkappa^{n_\varkappa}$ zur Hauptklasse wird. Die Anzahl der Klassen ist demnach

$$h = n_1 n_2 \ldots n_\nu.$$

Von den Zahlen $n_\varkappa$ mögen $n_1, n_2, \ldots n_{\lambda-1}$ gerade, $n_\lambda, n_{\lambda+1}, \ldots n_\nu$ ungerade sein.

Sind $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu$ irgend welche Wurzeln der Gleichungen

$$\omega_1^{n_1} = 1, \quad \omega_2^{n_2} = 1, \quad \ldots \quad \omega_\nu^{n_\nu} = 1,$$

so entspricht jeder Klasse $\Theta = \Theta_1^{s_1}\Theta_2^{s_2}\dots\Theta_\nu^{s_\nu}$ eine bestimmte $h$te Wurzel der Einheit

$$\omega = \omega_1^{s_1}\omega_2^{s_2}\dots\omega_\nu^{s_\nu},$$

welche mit $\chi(\Theta)$ bezeichnet werden und ein Charakter der Klasse Θ heissen soll (W. § 1). Auf diese Klassencharaktere χ finden dieselben Benennungen Anwendung wie auf die Zahlcharaktere τ. Die Anzahl aller Charaktere χ ist h, die Anzahl der ambigen unter ihnen $2^{\lambda-1}$; sie seien

$$\chi_1, \quad \chi_2, \quad \dots \quad \chi_{2^{\lambda-1}}.$$

Ist χ irgend ein Charakter, so mögen die Producte

$$\chi\chi_1, \quad \chi\chi_2, \quad \dots \quad \chi\chi_{2^{\lambda-1}}$$

der zu χ gehörige Complex heissen und

$$\chi^{-1}\chi_1, \quad \chi^{-1}\chi_2, \quad \dots \quad \chi^{-1}\chi_{2^{\lambda-1}}$$

der conjugirte Complex. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der zu χ gehörige Complex sich selbst conjugirt sei, ist:

Für jede Klasse Θ muss sein

$$\chi^4 = 1;$$

d. h. die Wurzeln $\omega_\varkappa$ müssen vierte Wurzeln der Einheit sein.

2. Die eigentlich primitiven Klassen der Determinante D seien

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \dots \quad \Theta_h$$

und mögen repräsentirt werden durch die Formen

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \dots \quad \psi_h.$$

Diese Formen können und sollen so ausgewählt werden, dass sämmtliche Coefficienten positiv sind.

Der Beweis stützt sich auf die Betrachtung der Reihe

$$L' = \chi(\Theta_1)\Sigma'\frac{\tau(\psi_1)}{\psi_1^s} + \chi(\Theta_2)\Sigma'\frac{\tau(\psi_2)}{\psi_2^s} + \dots + \chi(\Theta_h)\Sigma'\frac{\tau(\psi_h)}{\psi_h^s},$$

in welcher sich die Summationen Σ' auf alle Werthe von x, y erstrecken, die

1°. keinen gemeinschaftlichen Theiler haben,

2°. die betreffende Form $\psi = ax^2 + 2bxy + cy^2$ zu M relativ prim machen,

3°. für positive Determinanten den Bedingungen genügen:

$$y \geqq 0, \quad x > \gamma y,$$

wo $\gamma = \frac{T-bU}{aU}$, wenn mit T, U die kleinste positive Lösung der Gleichung $T^2 - DU^2 = 1$ bezeichnet wird.

So lange $s > 1$ ist, hat die Summe L' einen endlichen, von der Anordnung ihrer Glieder unabhängigen Werth.

Die Reihe L' ist zunächst in ein Product umzuformen. Es sei f eine nicht in M aufgehende, durch die Klasse $\Theta^{\pm 1}$ darstellbare Primzahl. Dann gilt für $s > 1$ die Gleichung:

$$\frac{1-\tau(f^2)f^{-2s}}{(1-\chi(\Theta)\tau(f)f^{-s})(1-\chi(\Theta^{-1})\tau(f)f^{-s})} = 1+(\chi(\Theta)+\chi(\Theta^{-1}))\tau(f)f^{-s}+(\chi(\Theta^2)+\chi(\Theta^{-2}))\tau(f^2)f^{-2s}+\cdots.$$

Lässt man f alle in M nicht aufgehenden Primzahlen durchlaufen, von welchen D quadratischer Rest ist (welche also durch Formen der Determinante D dargestellt werden können), und bildet das Product dieser Gleichungen, so kommt

$$\Pi \frac{1-\tau(f^2)f^{-2s}}{(1-\chi(\Theta)\tau(f)f^{-s})(1-\chi(\Theta^{-1})\tau(f)f^{-s})} = \Sigma(\tau(m)m^{-s}\Sigma\chi(\Theta)),$$

wo das erste Σ rechts sich auf alle positiven ganzen Zahlen m erstreckt, welche zu M prim sind und von welchen D quadratischer Rest ist, das zweite Σ aber auf alle gleichen oder verschiedenen Klassen Θ, denen eine Gruppe von eigentlichen Darstellungen der Zahl m entspricht (W. § 2). Bezeichnet man mit $\varkappa$ die Anzahl der Darstellungen einer Gruppe ($\varkappa = 1, 2, 4$, je nachdem $D > 1$, < -1, $= -1$), so wird

$$L' = \varkappa\Sigma(\tau(m)m^{-s}\Sigma\chi(\Theta)) = \varkappa\Pi\frac{1-\tau(f^2)f^{-2s}}{(1-\chi(\Theta)\tau(f)f^{-s})(1-\chi(\Theta^{-1})\tau(f)f^{-s})}.$$

Durchläuft g alle Primzahlen, welche in M nicht aufgehen und von welchen D quadratischer Nichtrest ist, n alle relativen Primzahlen zu M, so ist

$$\Sigma\frac{\tau(n^2)}{n^{2s}} = \Pi\frac{1}{1-\tau(f^2)f^{-2s}}\cdot\Pi\frac{1}{1-\tau(g^2)g^{-2s}}.$$

Diese Gleichung mit der vorigen multiplicirt giebt, wenn der Kürze wegen

$$G = \varkappa\Pi\frac{1}{1-\tau(g^2)g^{-2s}}$$

gesetzt wird:

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} L = \chi(\Theta_1)\Sigma\frac{\tau(\psi_1)}{\psi_1^s}+\cdots+\chi(\Theta_h)\Sigma\frac{\tau(\psi_h)}{\psi_h^s} \\ \quad = G\Pi\frac{1}{(1-\chi(\Theta)\tau(f)f^{-s})(1-\chi(\Theta^{-1})\tau(f)f^{-s})}, \end{cases}$$

wo die Σ sich auf alle x, y erstrecken, welche den Bedingungen 2°, 3° genügen.

Durch Logarithmirung und Entwickelung folgt

$$\text{(II.)} \quad \log\frac{L}{G} = \Sigma\frac{\chi(\Theta)+\chi(\Theta^{-1})}{f^s}\tau(f)+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\chi(\Theta^2)+\chi(\Theta^{-2})}{f^{2s}}\tau(f^2)+\cdots.$$

L und G sind im Allgemeinen imaginär; der imaginäre Bestandtheil von $\log\frac{L}{G} = \log L - \log G$ ist zwischen $-\pi i$ und $+\pi i$ zu nehmen. Da es h Charaktere χ, $\varphi(M)$ Charaktere τ giebt, so repräsentirt jede der Gleichungen (I.) und (II.) $h.\varphi(M)$ Gleichungen. die indessen nicht sämmtlich verschieden sind.

3. Zwei Reihen L mögen identisch heissen, wenn jedem Nenner $\psi_\varkappa^s$ in beiden derselbe Zähler $\chi(\Theta_\varkappa)\tau(\psi_\varkappa)$ entspricht, wobei entgegengesetzten Klassen $\Theta_\varkappa$ und $\Theta_\varkappa^{-1}$ entsprechende Glieder zu unterscheiden sind. Sind also zwei Reihen L' und L'', die bezw. den Charakteren χ', τ' und χ'', τ'' entsprechen, identisch, so muss für jede durch Formen einer beliebigen Klasse Θ eigentlich darstellbare zu M theilerfremde Zahl m sein

$$\chi'(\Theta)\tau'(m) = \chi''(\Theta)\tau''(m)$$

oder, wenn χ, τ diejenigen (einzigen) Charaktere bezeichnen, für welche $\chi' = \chi''\chi$, $\tau' = \tau''\tau$:

$$\text{(1.)} \quad \chi(\Theta)\tau(m) = 1;$$

also, wenn $\Theta = \Theta_1^{s_1}\Theta_2^{s_2}\ldots\Theta_\nu^{s_\nu}$ ist und α, β, γ_1, γ_2, ... die Indices von m sind:

$$\omega_1^{s_1}\omega_2^{s_2}\ldots\omega_\nu^{s_\nu}.\theta^\alpha\eta^\beta\varpi_1^{\gamma_1}\varpi_2^{\gamma_2}\cdots = 1.$$

Ist Θ die Hauptklasse, so ist $s_1 = s_2 = \cdots = s_\nu = 0$ und m lässt sich so wählen, dass seine Indices alle bis auf einen gleich 0 sind, der ausgenommene gleich 2. Hieraus folgt, dass

$$\theta = \pm 1, \quad \eta = \pm 1, \quad \varpi_1 = \pm 1, \quad \varpi_2 = \pm 1, \quad \ldots$$

d. h. τ ambig sein muss. Dasselbe gilt auch von χ; denn ist $\Theta = \Theta_\varkappa^2$, so können die Indices von m sämmtlich gerade gemacht werden, wodurch sich obige Gleichung auf $\omega_\varkappa^2 = 1$ reducirt. Also muss sein

$$\omega_\varkappa = \pm 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots \nu),$$

Nun kann (W. § 2) jeder ambige Charakter $\chi(\Theta)$ in die Form gebracht werden

$$\chi(\Theta) = \delta^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{Q}\right),$$

wo $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$ ist, Q ein positiver ungerader Theiler von D(incl. 1). δ kann nicht negativ sein, wenn $D \equiv 1 \pmod 4$ oder $\equiv 2 \pmod 8$; ε kann nicht negativ sein, wenn $D \equiv 1 \pmod 2$ oder $\equiv 4 \pmod 8$, und für $D \equiv 6 \pmod 8$ muss $\delta = \varepsilon$ sein.

Bezeichnet man mit S^2 das grösste in $D = D'S^2$ aufgehende Quadrat, mit P' das (positive) Product aller in D' aufgehenden ungeraden Primzahlen und setzt (D. § 52):

$$\begin{aligned}
&\delta' = +1, \quad \varepsilon' = +1, \quad \text{wenn} \quad D' \equiv 1 \pmod 4;\\
&\delta' = -1, \quad \varepsilon' = +1, \quad \text{wenn} \quad D' \equiv 3 \pmod 4;\\
&\delta' = +1, \quad \varepsilon' = -1, \quad \text{wenn} \quad D' \equiv 2 \pmod 8;\\
&\delta' = -1, \quad \varepsilon' = -1, \quad \text{wenn} \quad D' \equiv 6 \pmod 8;
\end{aligned}$$

so findet für jede (durch Formen der Determinante D darstellbare, zu M theilerfremde) Zahl m die Bedingung statt

$$(\alpha.) \qquad \delta'^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon'^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P'}\right) = 1.$$

Ferner lässt sich jedes ambige τ in der Form schreiben (D. § 135):

$$\tau(m) = \theta^{\frac{1}{2}(m-1)} \eta^{\frac{1}{8}(m^2-1)} \left(\frac{m}{P}\right),$$

wo P das Product derjenigen ungeraden Primfactoren von M bedeutet, denen eine negative Wurzel ϖ entspricht. Für jedes m muss also

$$(\delta\theta)^{\frac{m-1}{2}} (\varepsilon\eta)^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{PQ}\right) = 1$$

sein, was mit Rücksicht auf die Bedingung (α.), der die Zahlen m unterworfen sind, nur möglich ist, wenn

$$\text{entweder} \quad \theta = \delta, \quad \eta = \varepsilon, \quad P = \overline{Q} \quad \text{oder} \quad \theta = \delta\delta', \quad \eta = \varepsilon\varepsilon', \quad P = \overline{QP'},$$

wo $\overline{Q}$, $\overline{QP'}$ aus Q, QP' entstehen, wenn man daraus sämmtliche quadratische Factoren weglässt. χ ist ein beliebiger der $2^{\lambda-1}$ ambigen Charaktere; jedem χ entsprechen zwei τ. Die Gleichung (1.) hat also im Ganzen 2^λ Lösungen; d. h. ***von den $h.\varphi(M)$ Reihen L sind je 2^λ unter einander identisch.***

Auch nicht identische Reihen L können gleiche Werthe haben; doch

können nicht mehr als 2^λ Reihen gleichen Werth haben mit der Reihe

$$L_1 = \Sigma\frac{1}{\psi_1^s} + \Sigma\frac{1}{\psi_2^s} + \cdots + \Sigma\frac{1}{\psi_h^s},$$

welche den Hauptcharakteren χ und τ entspricht.

4. Es ist jetzt zunächst zu untersuchen, ob identische L demselben Charakter χ, aber conjugirten imaginären Charakteren τ entsprechen können.

Sind von den ungeraden Primfactoren von M $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ diejenigen, welche auch in P' aufgehen, $p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots$ die übrigen, so müssen alsdann die dem Charakter τ entsprechenden Wurzeln den Relationen genügen:

$\theta^{-1} = \delta'\theta,\ \eta^{-1} = \varepsilon'\eta,\ \varpi_1^{-1} = -\varpi_1,\ \ldots\ \varpi_\mu^{-1} = -\varpi_\mu,\ \varpi_{\mu+1}^{-1} = \varpi_{\mu+1},\ \varpi_{\mu+2}^{-1} = \varpi_{\mu+2},\ \ldots$

oder

$$\theta^2 = \delta', \quad \eta^2 = \varepsilon', \quad \varpi_1^2 = \varpi_2^2 = \cdots = \varpi_\mu^2 = -1, \quad \varpi_{\mu+1}^2 = \varpi_{\mu+2}^2 = \cdots = 1,$$

woraus

$$\varpi_1 = \pm i, \quad \varpi_2 = \pm i, \quad \ldots \quad \varpi_\mu = \pm i, \quad \varpi_{\mu+1} = \pm 1, \quad \varpi_{\mu+2} = \pm 1, \quad \ldots.$$

δ' muss gleich 1 sein, also $D' \equiv 1 \pmod 4$ oder $\equiv 2 \pmod 8$, η muss gleich ± 1 sein (und $\mu > 0$, da sonst τ reell), wenn $\varepsilon' = +1$, dagegen $\eta = \pm i$, wenn $\varepsilon' = -1$; beides lässt sich in der Gleichung $\eta = \pm i^{D'-1}$ zusammenfassen. Die Primzahlen $p_1, \ldots p_\mu$ müssen also sämmtlich von der Form $4n+1$ sein, also auch P', daher D positiv.

Somit nimmt $\tau(m)$ die Form an

$$\tau(m) = \theta^\alpha(\pm i^{D'-1})^\beta(\pm i)^{\gamma_1}\ldots(\pm i)^{\gamma_\mu}(\pm 1)^{\gamma_{\mu+1}}(\pm 1)^{\gamma_{\mu+2}}\ldots,$$

wobei (wegen 3. (α.)) die Bedingung gilt:

$$(D'-1)\beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu \equiv 0 \pmod 2.$$

Zweitens ist noch der Fall zu untersuchen, dass der Charakter χ imaginär und sein Complex sich selbst conjugirt ist, also $\chi^4 = 1$ (Art. 2). Dann muss wenigstens eine der Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{\lambda-1}$ imaginär ($= \pm i$) sein, es seien die Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\iota$; daher $n_1, n_2, \ldots n_\iota$ durch 4 theilbar. In der Reihe L hat dann die Summe der Glieder, für welche $\chi(\Theta_\varkappa) = \pm i$ ist, den Werth 0, da in derselben paarweise entgegengesetzte Klassen vorkommen, denen entgegengesetzte Glieder entsprechen, und für ambiges $\Theta_\varkappa$ $\chi(\Theta_\varkappa) = \pm 1$ ist. Ist aber

$$\Theta = \Theta_1^{s_1}\Theta_2^{s_2}\ldots\Theta_\nu^{s_\nu} \quad \text{und} \quad \chi(\Theta) = (\pm i)^{s_1}(\pm i)^{s_2}\ldots(\pm i)^{s_\iota}(\pm 1)^{s_{\iota+1}}\ldots(\pm 1)^{s_{\lambda-1}} = \pm 1,$$

so muss

$$s_1+s_2+\cdots+s_\iota \equiv 0 \pmod 2$$

sein. Ist also

$$\delta''^{\frac{1}{2}(m-1)}\varepsilon''^{\frac{1}{8}(m^2-1)}\left(\frac{m}{P''}\right)$$

derjenige ambige Charakter, welcher der Annahme

$$\omega_1=\omega_2=\cdots=\omega_\iota=-1, \quad \omega_{\iota+1}=\omega_{\iota+2}=\cdots=\omega_\nu=+1$$

entspricht, so findet für alle Klassen Θ, für welche $\chi(\Theta)=\pm 1$ ist, die Gleichung statt

$$\delta''^{\frac{1}{2}(m-1)}\varepsilon''^{\frac{1}{8}(m^2-1)}\left(\frac{m}{P''}\right)=1,$$

wo weder $\delta''=1$, $\varepsilon''=1$, $P''=1$, noch $\delta''=\delta'$, $\varepsilon''=\varepsilon'$, $P''=P'$ sein kann.

Hieraus folgt, dass mit der Reihe L, welche den Charakteren χ und τ entspricht, noch drei andere, demselben χ entsprechende gleichen Werth haben, nämlich ausser der damit identischen noch die beiden Reihen, welche demjenigen Charakter $\tau\tau''$ entsprechen, für welchen

$$\tau''(m)=\delta''^{\frac{1}{2}(m-1)}\varepsilon''^{\frac{1}{8}(m^2-1)}\left(\frac{m}{P''}\right) \quad \text{oder} \quad =(\delta'\delta'')^{\frac{1}{2}(m-1)}(\varepsilon'\varepsilon'')^{\frac{1}{8}(m^2-1)}\left(\frac{m}{P'P''}\right).$$

Dem Complex eines solchen Charakters χ entsprechen demnach $2^{\lambda-1}.4=2^{\lambda+1}$ gleiche Summen L. Ob noch andere L diesen gleich werden, kann hier unerörtert bleiben.

5. Die Reihen L sind nun in drei Arten zu unterscheiden:

Die den Hauptcharakteren entsprechende Reihe L_1 und die mit ihr identischen sollen *erster*, die den übrigen ambigen Charakteren (χ und τ) entsprechenden *zweiter*, alle übrigen *dritter* Art heissen. (Sind χ'' und τ'' ambig, χ' und τ' nicht beide ambig, so können die entsprechenden L nicht identisch sein; denn ist wieder $\chi'=\chi''\chi$, $\tau'=\tau''\tau$, so würde die Identität erfordern, dass χ und τ ambig wären, also auch χ' und τ', gegen die Voraussetzung.)

Es muss nun das Verhalten dieser Reihen untersucht werden, wenn $s=1+\varrho$ abnehmend gegen 1, also ϱ gegen 0 convergirt.

Von der Reihe L_1 steht fest (D. §§ 95, 98), dass sich das Product ϱL_1 einem positiven endlichen Grenzwerthe gh nähert, wenn ϱ gegen 0 convergirt; daher wird L_1 unendlich wie $\frac{gh}{\varrho}$.

Die Reihen zweiter Art sind von der Form (Art. 3):

$$L_2 = \sum_{k=1}^{k=h} \sum_{x,y} \delta^{\frac{1}{2}(\psi_k-1)} \varepsilon^{\frac{1}{8}(\psi_k^2-1)} \left(\frac{\psi_k}{Q}\right) \cdot \theta^{\frac{1}{2}(\psi_k-1)} \eta^{\frac{1}{8}(\psi_k^2-1)} \left(\frac{\psi_k}{P}\right) \psi_k^{-s}$$

$$= \varkappa \Sigma 2^{\mu} (\delta\theta)^{\frac{1}{2}(m-1)} (\varepsilon\eta)^{\frac{1}{8}(m^2-1)} \left(\frac{m}{PQ}\right) m^{-s},$$

wo m die sämmtlichen positiven zu M theilerfremden Zahlen durchläuft, von welchen D quadratischer Rest ist, μ die Anzahl der verschiedenen Primfactoren von m bedeutet und wo die Combinationen $\theta = \delta$, $\eta = \varepsilon$, $P = \bar{Q}$ und $\theta = \delta\delta'$, $\eta = \varepsilon\varepsilon'$, $P = \overline{QP'}$ ausgeschlossen sind.

Ist P_1 das Product aller verschiedenen Primzahlen, welche in PQ in ungerader Potenz aufgehen, S_1 das Product aller derjenigen verschiedenen Primfactoren von M, welche in $2P_1$ nicht aufgehen, so setze man (D. § 135)

$$D_1 = \pm P_1 S_1^2 \equiv 1 \pmod 4, \quad \text{wenn} \quad \delta\theta = +1, \quad \varepsilon\eta = +1,$$
$$D_1 = \pm P_1 S_1^2 \equiv 3 \pmod 4, \quad \text{wenn} \quad \delta\theta = -1, \quad \varepsilon\eta = +1,$$
$$D_1 = \pm 2P_1 S_1^2 \equiv 2 \pmod 8, \quad \text{wenn} \quad \delta\theta = +1, \quad \varepsilon\eta = -1,$$
$$D_1 = \pm 2P_1 S_1^2 \equiv 6 \pmod 8, \quad \text{wenn} \quad \delta\theta = -1, \quad \varepsilon\eta = -1.$$

Dann ist $2D_1$ durch D' theilbar; es sei $4D_1 = D'D''$, wenn D_1 ungerade, D' gerade ist, in den übrigen Fällen $D_1 = D'D''$. Die vorige Gleichung lässt sich jetzt schreiben

$$L_2 = \varkappa \Sigma 2^{\mu} \left(\frac{D'D''}{m}\right) m^{-s},$$

wo m wie früher alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, welche zu $2D'D''$ (d. h. zu M) relativ prim sind und von welchen D' quadratischer Rest ist. Also ist, wenn f dasselbe bedeutet wie in Art. 2

$$L_2 = \varkappa \Pi \frac{1+\left(\frac{D'D''}{f}\right) f^{-s}}{1-\left(\frac{D'D''}{f}\right) f^{-s}} = \varkappa \Pi \frac{1+\left(\frac{D'D''}{r}\right) r^{-s}}{1-\left(\frac{D''}{r}\right) r^{-s}}$$

$$= \varkappa \Pi (1-r^{-2s}) \Pi \frac{1}{1-\left(\frac{D'D''}{r}\right) r^{-s}} \Pi \frac{1}{1-\left(\frac{D''}{r}\right) r^{-s}},$$

wo r alle Primzahlen durchläuft, welche in $2D'D''$ nicht aufgehen; oder endlich

$$L_2 = \varkappa \frac{\Sigma\left(\frac{D'D''}{n}\right) n^{-s} \cdot \Sigma\left(\frac{D''}{n}\right) n^{-s}}{\Sigma n^{-2s}},$$

wo die Summationen sich auf alle positiven ganzen zu $2D'D''$ theilerfremden Zahlen erstrecken. Diese Summen haben aber für $s = 1$ endliche, von Null verschiedene Grenzwerthe (W. § 4), also auch L_2.

6. Um dasselbe auch für die Reihen L_3 darzuthun, setze man in Gleichung (II.) Art. 2 für τ successive alle Charaktere ein und addire die so erhaltenen $\varphi(M)$ Gleichungen, so erhält man (D. § 136):

$$\text{(III.)} \qquad \varphi(M)\left\{\Sigma\frac{\chi(\Theta)+\chi(\Theta^{-1})}{f^s}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\chi(\Theta^2)+\chi(\Theta^{-2})}{f^{2s}}+\cdots\right\} = \sum_\tau \log\frac{L}{G}.$$

Die erste Summe links erstreckt sich auf alle Primzahlen f, welche $\equiv 1 (\text{mod. } M)$ sind, die zweite auf alle diejenigen (von den in Art. 2 definirten) Primzahlen f, für welche $f^2 \equiv 1 \pmod{M}$ ist, u. s. w.

Was G anbetrifft, findet man leicht, dass es für alle $s > \frac{1}{2}$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat, der sich mit s stetig ändert. Ist τ ambig, so ist G reell und positiv; ist τ imaginär, so kann auch G imaginär sein; für conjugirtes τ^{-1} entspricht dem G ein conjugirtes G' und (wie aus (I.) erhellt) dem L ein conjugirtes L', weswegen auf der rechten Seite der Gleichung (III.) die imaginären Quotienten $\frac{L}{G}$ immer paarweise conjugirt auftreten und die entsprechende Summe $\log\frac{L}{G}+\log\frac{L'}{G'} = \log\frac{LL'}{GG'}$ reell ist (ihr imaginärer Bestandtheil muss zwischen $-2\pi i$ und $+2\pi i$ liegen).

Ist χ ambig, so ist in Gleichung (III.) $\chi(\Theta) = \chi(\Theta^{-1}) = 1$, da jede Klasse Θ, welche eine Primzahl f darstellt, die $\equiv 1 \pmod{M}$ ist, ins Hauptgeschlecht gehört; daher geht in diesem Fall die Gleichung über in

$$2\varphi(M)\left\{\Sigma\frac{1}{f^s}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{f^{2s}}+\cdots\right\} = \sum_\tau \log\frac{L}{G}.$$

Da es für jedes χ zwei Charaktere τ giebt, für welche zwei Reihen L identisch werden, und speciell für jedes ambige χ zwei τ, für welche $L = L_1$ wird, so kommen auf der rechten Seite von (III.) je zwei identische L vor und in der vorigen Gleichung zwei L, die den Werth L_1 haben. Behält man von je zwei identischen L nur eins bei, so geht die vorige Gleichung über in:

$$\text{(III}^a\text{.)} \qquad \varphi(M)\left\{\Sigma\frac{1}{f^s}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{f^{2s}}+\cdots\right\} = \sum_\tau \log\frac{L}{G}.$$

Es soll nun später (Art. 8—10) bewiesen werden, dass die Reihen $L(\varrho)$ zweiter und dritter Art für $\varrho \geqq 0$ endliche und stetige Functionen von

ϱ sind mit ebensolchen Differentialquotienten, sodass, wenn

$$L(\varrho) = f(\varrho)+if_1(\varrho)$$

gesetzt wird, eine Gleichung der Form stattfindet

$$(\beta.) \qquad L(\varrho) = L(0)+\varrho(f'(\vartheta\varrho)+if_1'(\vartheta_1\varrho)) \qquad (0<\vartheta<1, 0<\vartheta_1<1),$$

wo die Ableitungen $f'(\varrho)$ und $f_1'(\varrho)$ von $f(\varrho)$ und $f_1(\varrho)$ stetige (also endliche) Functionen von ϱ sind, so lange $\varrho \geqq 0$.

Mit Hülfe der Gleichungen (III.), (III^a.), (β.) lässt sich nun darthun, dass auch $L_3(0)$ von Null verschieden sein muss. Wäre nämlich $L_3(0) = 0$, so würde aus (β.) folgen, $L_3(\varrho) = \varrho t$, wo t endlich bleibt, und das conjugirte $L_3'(\varrho) = \varrho t'$, also $L_3(\varrho)L_3'(\varrho) = \varrho^2 tt'$, wo tt' endlich und positiv ist, jedoch mit ϱ zugleich gegen Null convergiren kann.

Würde nun *erstens* für ein ambiges χ $L_3(0) = 0$, so würde auf der rechten Seite der Gleichung (III^a.) ein entsprechendes Glied $\log(\varrho t)$ auftreten. Gesetzt es kämen daselbst m Paare von nicht identischen conjugirten L_3 vor, für welche $L_3(0) = 0$, und ausserdem n mit ϱ verschwindende L_3, die mit ihren conjugirten identisch sind (Art. 4), so nähme jene Seite die Form an

$$(2m+n-1)\log\varrho+\log I',$$

wo I' endlich bleibt. So lange aber $2m+n-1 \geqq 0$ ist, bleibt dieser Ausdruck endlich oder wird negativ unendlich, wenn ϱ gegen 0 convergirt, während die linke Seite von (III^a.) positiv unendlich wird wie $-\log\varrho$ *); daher muss $m = n = 0$ sein; w. z. b. w.

Ist *zweitens* χ imaginär, so summire man die Gleichungen, die man aus (III.) erhält, wenn man χ alle Charaktere durchlaufen lässt. Man bekommt:

$$(\text{IV.}) \qquad 2h\varphi(M)\left\{\Sigma\frac{1}{f^s}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{f^{2s}}+\cdots\right\} = \sum_{\chi}\sum_{\tau}\log\frac{L}{G},$$

wo links das erste Σ sich über alle Primzahlen f erstreckt, die $\equiv 1 \pmod{M}$ sind und sich durch die Hauptklasse darstellen lassen. Auf der rechten Seite kommt das Glied $\log L_1$ genau 2^λ-mal vor. Ausser diesen Gliedern könnten nach dem Vorhergehenden nur noch solche Glieder unendlich werden, welche von der Form $\log L_3$ sind und imaginären χ entsprechen.

---

*) D. § 137. Dasselbe ergäbe sich übrigens auch aus den obigen Gleichungen mittelst der Annahme $D = -1$.

Diese χ würden dann in eine Anzahl von Complexen aus $2^{\lambda-1}$ Charakteren zerfallen. Wären unter diesen Complexen m Paare von conjugirten, ausserdem n sich selbst conjugirte, so erhielte man auf der rechten Seite von (IV.) einen Ausdruck von der Form (Art. 4):

$$2^{\lambda}(2m+2n-1)\log\varrho+\log\Gamma,$$

wo Γ endlich bleibt. Sind m und n nicht beide Null, so würde demnach für $\varrho=0$ die rechte Seite negativ unendlich, während die linke nicht negativ sein kann. Daher muss $m=n=0$ sein; w. z. b. w.

7. Nachdem bewiesen, dass $L_2(0)$ und $L_3(0)$ nicht verschwinden, ergiebt sich der anfangs aufgestellte Satz wie folgt:

Nach der Voraussetzung ist N prim zu M. Man multiplicire die Gleichung (II.) mit $\tau^{-1}(N)$ und summire dann zunächst über alle $\varphi(M)$ Charaktere τ, so kommt (D. § 137):

$$\varphi(M)\left\{\Sigma\frac{\chi(\Theta)+\chi(\Theta^{-1})}{f^s}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\chi(\Theta^2)+\chi(\Theta^{-2})}{f^{2s}}+\cdots\right\}=\sum_{\tau}\tau^{-1}(N)\log\frac{L}{G}.$$

Das erste Σ links erstreckt sich auf alle Primzahlen f, von welchen D quadratischer Rest ist und welche $\equiv N \pmod M$ sind, das zweite Σ auf alle Primzahlen f, von welchen D quadratischer Rest ist und für welche $f^2\equiv N \pmod M$ ist, u. s. w.

Diese Gleichung multiplicire man ferner mit $\chi(\Theta_\varkappa)$ und summire dann über alle h Charaktere χ, so wird man erhalten (W. § 2):

$$\text{(V.)}\qquad eh\varphi(M)\left\{\Sigma\frac{1}{f^s}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{f^{2s}}+\cdots\right\}=\sum_{\chi}\sum_{\tau}\chi(\Theta_\varkappa)\tau^{-1}(N)\log\frac{L}{G},$$

wo $e=2$ oder 1 ist, je nachdem $\Theta_\varkappa$ ambig ist oder nicht, und wo sich das erste Σ links auf alle diejenigen Primzahlen f erstreckt, welche $\equiv N \pmod M$ sind und sich durch die Klasse $\Theta_\varkappa$ darstellen lassen, das zweite Σ auf alle diejenigen Primzahlen f, für welche $f^2\equiv N \pmod M$ ist und sich durch $\Theta_\varkappa$ darstellen lässt, u. s. w. Auf der rechten Seite tritt nach Früherem die Reihe L_1 genau 2^λ-mal auf, nämlich zweimal für jedes ambige

$$\chi(\Theta_\varkappa)=\delta^{\frac{1}{2}(m_\varkappa-1)}\varepsilon^{\frac{1}{8}(m_\varkappa^2-1)}\left(\frac{m_\varkappa}{Q}\right)$$

($m_\varkappa$ bezeichnet eine durch $\Theta_\varkappa$ darstellbare zu $2D$ theilerfremde Zahl) in Verbindung mit den Charakteren

$$\tau(m)=\delta^{\frac{1}{2}(m-1)}\varepsilon^{\frac{1}{8}(m^2-1)}\left(\frac{m}{Q}\right)\quad\text{und}\quad\tau(m)=(\delta\delta')^{\frac{1}{2}(m-1)}(\varepsilon\varepsilon')^{\frac{1}{8}(m^2-1)}\left(\frac{m}{QP'}\right).$$

Der Coefficient von $\log L_1$ auf der rechten Seite von (V.) lautet demnach, da $\tau^{-1}(N) = \tau(N)$ ist:

$$\Sigma\chi(\Theta_\varkappa)\tau(N)$$
$$= \Sigma\delta^{\frac{1}{2}(m_\varkappa-1)}\varepsilon^{\frac{1}{8}(m_\varkappa^2-1)}\left(\frac{m_\varkappa}{Q}\right)\delta^{\frac{1}{2}(N-1)}\varepsilon^{\frac{1}{8}(N^2-1)}\left(\frac{N}{Q}\right)\left\{1+\delta'^{\frac{1}{2}(N-1)}\varepsilon'^{\frac{1}{8}(N^2-1)}\left(\frac{N}{P'}\right)\right\}$$
$$= \left\{1+\delta'^{\frac{1}{2}(N-1)}\varepsilon'^{\frac{1}{8}(N^2-1)}\left(\frac{N}{P'}\right)\right\}\Sigma\delta^{\frac{1}{2}(m_\varkappa N-1)}\varepsilon^{\frac{1}{8}(m_\varkappa^2N^2-1)}\left(\frac{m_\varkappa N}{Q}\right),$$

wo die Summation rechts sich über alle $2^{\lambda-1}$ zulässigen Werthecombinationen (W. § 2) erstreckt. Diese Summe verschwindet aber nur dann nicht, wenn

$$\left(\frac{N}{q}\right) = \left(\frac{m_\varkappa}{q}\right)$$

für jede in D aufgehende ungerade Primzahl q, und wenn ausserdem

$N \equiv m_\varkappa \pmod 4$, wenn $D \equiv 3 \pmod 4$ oder $\equiv 4 \pmod 8$,
$N \equiv m_\varkappa \pmod 8$, wenn $D \equiv 0 \pmod 8$,
$\left(\frac{\pm 2}{N}\right) = \left(\frac{\pm 2}{m_\varkappa}\right)$, je nachdem $D \equiv \pm 2 \pmod 8$;

d. h. wenn N mit dem quadratischen Charakter der Klasse $\Theta_\varkappa$ verträglich ist.

Der erste Factor auf der rechten Seite ist unter diesen Bedingungen gleich 2, sodass der Coefficient von $\log L_1$ gleich 2^λ wird. Wenn ϱ gegen 0 convergirt, wächst daher die rechte Seite der Gleichung (V.) ins positiv Unendliche wie $-2^\lambda \log\varrho$. Da nun die Summe aller Glieder, welche in der Klammer links auf das erste Glied $\Sigma\frac{1}{f^s}$ folgen, endlich ist, so muss dieses erste Glied ebenfalls ins Unendliche wachsen und zwar wie $-\frac{2^\lambda}{eh\varphi(M)}\log\varrho$. Die Anzahl derjenigen Primzahlen f, welche $\equiv N \pmod M$ sind und sich durch eine Form der Klasse $\Theta_\varkappa$ darstellen lassen, ist daher unendlich, wenn N im quadratischen Charakter mit $\Theta_\varkappa$ stimmt.

8. Es bleibt jetzt noch die Richtigkeit der in Art. 6 vorausgesetzten Eigenschaft der Function $L(\varrho)$ für jede Reihe zweiter und dritter Art nachzuweisen.

Der Beweis stützt sich auf die Untersuchung der Reihen

$$\Sigma\frac{\tau(\psi(x,y))}{\psi(x,y)^{1+\varrho}} \quad \text{und} \quad \Sigma\frac{\tau(\psi(x,y))\log\psi(x,y)}{\psi(x,y)^{1+\varrho}}$$

für den Fall, dass ϱ gegen 0 convergirt. Die Summen erstrecken sich über alle ganzen Zahlen x, y, welche die Form $\psi(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2$

prim zu M machen und für positive Determinanten ausserdem den Bedingungen genügen

$$y \geqq 0, \quad x > \gamma y, \quad \left(\gamma = \frac{T - bU}{aU} \quad \text{nach Art. 2}\right).$$

Die Coefficienten a, b, c sind nach Voraussetzung positiv.

Die Zahlen x, y, welche der Form ψ einen zu M theilerfremden Werth ertheilen, sind in einer endlichen Anzahl von Linearformen enthalten

$$x = Mx_0 + \xi, \quad y = My_0 + v,$$

wo ξ, v kleiner als M und nicht negativ vorausgesetzt werden können und sollen.

Dann ist

$$\Sigma \frac{\tau(\psi(x,y))}{\psi(x,y)^{1+\varrho}} = \sum_{\xi,v} \tau(\psi(\xi,v)) \Sigma \frac{1}{\psi(Mx_0+\xi, My_0+v)^{1+\varrho}}.$$

Das erste Σ rechts bezieht sich auf alle Werthsysteme ξ, v, das zweite Σ auf alle positiven und negativen ganzen Zahlen x_0, y_0, welche indess für positives D noch den Bedingungen genügen müssen

$$My_0 + v \geqq 0, \quad Mx_0 + \xi > \gamma(My_0 + v),$$

von denen die erste sich übrigens auf $y_0 \geqq 0$ reducirt.

Es soll nun gezeigt werden, dass es eine endliche Zahl g_1 giebt, so dass die Ausdrücke

$$\Sigma \frac{1}{\psi(Mx_0+\xi, My_0+v)^{1+\varrho}} - \frac{g_1}{\varrho}, \qquad \Sigma \frac{\log\psi(Mx_0+\xi, My_0+v)}{\psi(Mx_0+\xi, My_0+v)^{1+\varrho}} - \frac{g_1}{\varrho^2}$$

für $\varrho = 0$ endliche Grenzwerthe besitzen. Setzt man zur Abkürzung $\frac{\xi}{M} = \alpha$, $\frac{v}{M} = \beta$, so lassen sich diese Ausdrücke in die Form bringen

$$\frac{1}{M^{2(1+\varrho)}} \left\{ \Sigma \frac{1}{\psi(x_0+\alpha, y_0+\beta)^{1+\varrho}} - \frac{M^2 g_1}{\varrho} - M^2 \frac{M^{2\varrho}-1}{\varrho} g_1 \right\}$$

und

$$\frac{2\log M}{M^{2(1+\varrho)}} \left\{ \Sigma \frac{1}{\psi(x_0+\alpha, y_0+\beta)^{1+\varrho}} - \frac{M^2 g_1}{\varrho} \right\} + \frac{1}{M^{2(1+\varrho)}} \left\{ \Sigma \frac{\log\psi(x_0+\alpha, y_0+\beta)}{\psi(x_0+\alpha, y_0+\beta)^{1+\varrho}} - \frac{M^2 g_1}{\varrho^2} \right\}$$
$$- \frac{g_1}{M^{2\varrho}} \frac{M^{2\varrho} - 1 - 2\varrho\log M}{\varrho^2}.$$

Da

$$\lim_{\varrho=0} \frac{M^{2\varrho}-1}{\varrho} = 2\log M, \quad \lim_{\varrho=0} \frac{M^{2\varrho}-1-2\varrho\log M}{\varrho^2} = 2(\log M)^2,$$

so bleibt bloss zu zeigen, dass die Ausdrücke ($g = M^2 g_1$ gesetzt)

$$\Sigma \frac{1}{\psi(x_0+\alpha, y_0+\beta)^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho}, \quad \Sigma \frac{\log\psi(x_0+\alpha, y_0+\beta)}{\psi(x_0+\alpha, y_0+\beta)^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho^2}$$

für $\varrho = 0$ und ein gewisses endliches g endliche Grenzwerthe haben.

Nun ist (W. § 5) bereits bewiesen, dass die Ausdrücke

$$\Sigma \frac{1}{\psi(x, y)^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho}, \quad \Sigma \frac{\log\psi(x, y)}{\psi(x, y)^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho^2}$$

diese Bedingung erfüllen; g ist endlich und dasselbe für alle eigentlich primitiven Formen ψ der Determinante D; die Summation erstreckt sich für negative Determinanten auf alle ganzen Zahlen x, y, ausgenommen die Combination $x = 0$, $y = 0$; für positive Determinanten auf alle ganzzahligen Werthe von x, y, welche den Bedingungen genügen $y \geqq 0$, $x > \gamma y$. Also wird sie auch für die vorigen beiden Ausdrücke bewiesen sein, wenn gezeigt wird, dass die Summen

$$\Sigma\left\{\frac{1}{\psi(x, y)^{1+\varrho}} - \frac{1}{\psi(x+\alpha, y+\beta)^{1+\varrho}}\right\}, \quad \Sigma\left\{\frac{\log\psi(x, y)}{\psi(x, y)^{1+\varrho}} - \frac{\log\psi(x+\alpha, y+\beta)}{\psi(x+\alpha, y+\beta)^{1+\varrho}}\right\}$$

sich endlichen Grenzwerthen nähern, wenn ϱ gegen 0 convergirt.

Zu diesem Zwecke unterwerfe man die Form ψ vorerst einer Transformation. Ist ζ der grösste gemeinschaftliche Theiler von ξ und v, $\xi = \zeta\xi'$, $v = \zeta v'$, $\frac{\zeta}{M} = t$, so ist $\frac{1}{M} \leqq t \leqq \frac{M-1}{M}$. Die Zahlen ξ', v' sind nicht negativ und relativ prim. Man wähle zwei nicht negative Zahlen λ, μ so, dass $\xi'\mu - v'\lambda = 1$ ist, und transformire die Form ψ durch die Substitution

$$x = \xi' x' + \lambda y', \quad y = v' x' + \mu y',$$

woraus

$$x+\alpha = \xi'(x'+t) + \lambda y', \quad y+\beta = v'(x'+t) + \mu y'.$$

Geht ψ hierbei über in $a' x'^2 + 2b' x' y' + c' y'^2$, so geht also $\psi(x+\alpha, y+\beta)$ über in $a'(x'+t)^2 + 2b'(x'+t)y' + c' y'^2$.

Lässt man zur Vereinfachung die Accente wieder weg, so nehmen nunmehr obige Summen die Form an:

$$S = \Sigma\left|(ax^2+2bxy+cy^2)^{-1-\varrho} - (a(x+t)^2+2b(x+t)y+cy^2)^{-1-\varrho}\right|,$$

$$\mathfrak{S} = \Sigma\left\{\frac{\log(ax^2+2bxy+cy^2)}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}} - \frac{\log(a(x+t)^2+2b(x+t)y+cy^2)}{(a(x+t)^2+2b(x+t)y+cy^2)^{1+\varrho}}\right\}.$$

Für negative Determinanten durchlaufen hier x, y alle ganzen Zahlen (in den Minuenden die Werthecombination $x = 0$, $y = 0$ ausgenommen), für

positive Determinanten nur diejenigen ganzzahligen Werthe, welche den Bedingungen genügen:

$$\text{für die Minuenden:} \quad y \geqq 0, \quad x > \gamma y,$$
$$\text{für die Subtrahenden:} \quad y \geqq 0, \quad x+t > \gamma y,$$
$$\left(\gamma = \frac{T-bU}{aU};\ a,\ b,\ c > 0;\ 0 < t < 1\right).$$

9. Von hier ab ist es nothwendig, positive und negative Determinanten gesondert zu behandeln.

1°. *Negative Determinanten:* $D = -\Delta$.

X, Y seien positive ganze Zahlen, welche der Bedingung genügen

$$aX = bY.$$

Ich zerlege die Summe S in zwei Theile: in den ersten S_1 nehme ich alle Glieder auf, für welche (unter $|x|$ den absoluten Werth von x verstanden)

$$|x| < X, \quad |y| < Y,$$

in den zweiten S_2 alle übrigen Glieder. Dann besteht S_1 aus einer endlichen Anzahl endlicher Summanden und ist eine stetige Function von ϱ. Den zweiten Theil S_2 zerlege ich wieder in zwei Theile S_2' und S_2'', indem ich die Glieder von S_2 in S_2' oder in S_2'' aufnehme, je nachdem sie positiv oder negativ sind, d. h. je nachdem

$$ax+by+\tfrac{1}{2}at > 0 \quad \text{oder} \quad < 0.$$

S_2' ist positiv und kleiner als

$$\sum_{x,y} \left\{(ax^2+2bxy+cy^2)^{-1-\varrho} - (a(x+1)^2+2b(x+1)y+cy^2)^{-1-\varrho}\right\}$$
$$= \Sigma(ax^2+2bxy+cy^2)^{-1-\varrho},$$

(welche Gleichung gilt für $\varrho > -\frac{1}{2}$) die Summe rechts erstreckt über alle ganzzahligen Werthe von x, y, für welche entweder

$$1) \quad x = X, \quad |y| < Y$$

oder

$$2) \quad |y| \geqq Y, \quad 0 < ax+by+\tfrac{1}{2}at \leqq a$$

oder

$$3) \quad x = -X, \quad Y - \frac{at}{2b} < y < Y.$$

Die Summe der Glieder, welche der Bedingung 1) genügen, ist

$$\sum_y \frac{c^{1+\varrho}}{(\Delta X^2+(bX+cy)^2)^{1+\varrho}} < \frac{c^{1+\varrho}(2Y-1)}{(\Delta X^2)^{1+\varrho}} < \frac{2a}{b}\left(\frac{c}{\Delta}\right)^{1+\varrho} X^{-1-2\varrho}.$$

Da $ax^2+2bxy+cy^2$ bei constantem y ein Minimum $\left(=\frac{\Delta y^2}{a}\right)$ wird für $ax+by=0$, so ist die Summe derjenigen Glieder, welche der Bedingung 2) entsprechen, kleiner als

$$\sum_y \left(\frac{a}{\Delta y^2}\right)^{1+\varrho} = 2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{1+\varrho}(Y,\ \varrho),$$

wo

$$(Y,\varrho) = Y^{-2(1+\varrho)}+(Y+1)^{-2(1+\varrho)}+(Y+2)^{-2(1+\varrho)}+\cdots \text{ in inf.}$$

für $\varrho > -\frac{1}{2}$ mit unendlich wachsendem Y gegen 0 convergirt.

In der dritten Summe kann y nur die Werthe annehmen $Y-1$, $Y-2$, ... $Y-E$, wenn E die grösste in $\frac{at}{2b}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet; daher ist diese Summe

$$\sum \frac{c^{1+\varrho}}{(\Delta X^2+(bX-cy)^2)^{1+\varrho}} < \frac{at}{2b}\left(\frac{c}{\Delta}\right)^{1+\varrho} X^{-2(1+\varrho)}.$$

So lange $\varrho > -\frac{1}{2}$ ist, convergiren alle drei Summen mit unendlich wachsendem X gegen 0, also auch S_2'. Dasselbe liesse sich ebenso für S_2'' zeigen, gilt daher auch für S_2. Die Summe $S = S_1+S_2$ erscheint sonach in zwei Theile zerlegt, von denen der erste eine stetige Function von ϱ ist, der zweite beliebig klein wird mit wachsendem X. Daraus folgt, dass für $\varrho > -\frac{1}{2}$ auch S eine stetige Function von ϱ sein muss. – In analoger Weise liesse sich dies für $\mathfrak{S}$ nachweisen.

2°. *Positive Determinanten.*

Zur Vereinfachung kann und soll immer $ac > 1$, also $\gamma < 0$ vorausgesetzt werden. Immerhin ist dann $a\gamma+b = \frac{T}{U} > 0$. Für $y \geqq 0$, $x > \gamma y$ ist daher $ax+by > (a\gamma+b)y \geqq 0$; d. h. bei constantem y wächst

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

mit x. Die Glieder der Reihe S sind daher sämmtlich kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$\sum\{(ax^2+2bxy+cy^2)^{-1-\varrho}-(a(x+1)^2+2b(x+1)y+cy^2)^{-1-\varrho}\},$$
$$(y \geqq 0,\ x > \gamma y).$$

Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass diejenigen Glieder von S, für welche $y \geqq 0$, $\gamma y - t < x \leqq \gamma y$, negativ sind, weil in denselben der Minuend wegfällt und nur der Subtrahend bleibt, während in letzterer Reihe sämmtliche Glieder positiv sind.

Ich zerlege nun S wieder in zwei Theile. Der erste S_1 enthalte diejenige endliche Anzahl von Gliedern, für welche $x < X$, $y < X$, wo X eine positive ganze Zahl bedeutet. Der zweite S_2 enthält die übrigen Glieder und zerfällt in drei Theile:

Der erste S_2' enthält die negativen Glieder, für welche

$$y \geqq X,\ \gamma y - t < x \leqq \gamma y,$$

der zweite S_2'' diejenigen Glieder, für welche $y \geqq X$, $x > \gamma y$,

der dritte S_2''' diejenigen Glieder, für welche $y < X$, $x \geqq X$.

Nun ist

$$-S_2' = \Sigma(a(x+t)^2+2b(x+t)y+cy^2)^{-1-\varrho} < \sum_y (a\gamma^2+2b\gamma+c)^{-1-\varrho} y^{-2(1+\varrho)}$$
$$= (aU^2)^{1+\varrho}(X, \varrho),$$

$$S_2'' < \Sigma\{(ax^2+2bxy+cy^2)^{-1-\varrho} - (a(x+1)^2+2b(x+1)y+cy^2)^{-1-\varrho}\}$$
$$= \Sigma(ax^2+2bxy+cy^2)^{-1-\varrho} < (aU^2)^{1+\varrho}(X, \varrho),$$
$$(y \geqq X,\ \gamma y < x \leqq \gamma y+1)$$

$$S_2''' < \Sigma\{(ax^2+2bxy+cy^2)^{-1-\varrho} - (a(x+1)^2+2b(x+1)y+cy^2)^{-1-\varrho}\}$$
$$= \Sigma(aX^2+2bXy+cy^2)^{-1-\varrho} < a^{-1-\varrho}X^{-1-2\varrho}.$$
$$(0 \leqq y < X)$$

So lange $\varrho > -\frac{1}{2}$, convergiren daher S_2', S_2'', S_2''', somit auch S_2 mit wachsendem X gegen 0 und ist daher $S = S_1 + S_2$ eine stetige Function von ϱ. Dasselbe gilt für $\mathfrak{S}$.

10. Aus dem Bisherigen ergiebt sich, dass

$$\sum_{\xi,v} \tau(\psi(\xi, v)) \left\{ \sum_{x_0,y_0} \frac{1}{\psi(Mx_0+\xi, My_0+v)^{1+\varrho}} - \frac{g}{M^2\varrho} \right\}$$

für $\varrho \geqq 0$ eine stetige Function $\Phi(\varrho)$ von ϱ ist, mit einem ebenfalls stetigen Differentialquotienten $\Phi'(\varrho)$, und

$$\Sigma \frac{\tau(\psi)}{\psi^{1+\varrho}} = \frac{g}{M^2\varrho} \sum_{\xi,v} \tau(\psi(\xi, v)) + \Phi(\varrho).$$

Es handelt sich jetzt noch um Ermittelung der Summe $\Sigma\tau(\psi(\xi, v))$.

Sind α, β, γ_1, γ_2, ... die Indices von $\psi(\xi, v)$, so ist

$$\sum_{\xi,v} \tau(\psi(\xi, v)) = \Sigma\theta^\alpha \eta^\beta \varpi_1^{\gamma_1} \varpi_2^{\gamma_2} \cdots = \sum_{\alpha,\beta} \theta^\alpha \eta^\beta . \sum_{\gamma_1} \varpi_1^{\gamma_1} . \sum_{\gamma_2} \varpi_2^{\gamma_2} \ldots,$$

wo θ, η, ϖ_1, ϖ_2, ... einer bestimmten Wahl des Charakters τ entsprechen.

Man findet nun ohne Schwierigkeit, dass $\Sigma\theta^\alpha\eta^\beta$ nur dann von Null verschieden ist und zwar gleich $\theta^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\frac{m^2-1}{8}} . 2^{2\sigma-1}$, wenn gesetzt wird:

für

$$D \equiv 1 \pmod 4, \quad D \equiv 3 \pmod 4 \text{ oder } \equiv 4 \pmod 8,$$
$$D \equiv 0 \pmod 8, \quad D \equiv 2 \pmod 8, \quad D \equiv 6 \pmod 8$$

bezw.

$$\theta = \eta = 1; \qquad \theta = \pm 1,\ \eta = 1;$$
$$\theta = \pm 1,\ \eta = \pm 1; \quad \theta = +1,\ \eta = \pm 1; \qquad \theta = \eta = \pm 1,$$

welche Bestimmungen dieselben sind wie diejenigen für δ, ε in Art. 3. m bedeutet eine durch die Form ψ darstellbare zu $2D$ theilerfremde Zahl.

Ist D durch die ungerade Primzahl $p_\varkappa$ theilbar, so findet man, dass $\Sigma \varpi_\varkappa^{\gamma_\varkappa}$ immer den Werth 0 hat, ausgenommen, wenn $\varpi_\varkappa = \pm 1$, und zwar ist dann

$$\sum_{\gamma_\varkappa} \varpi_\varkappa^{\gamma_\varkappa} = p_\varkappa^{2\pi_\varkappa - 1}(p_\varkappa - 1) \quad \text{oder} \quad = \varpi_\varkappa p_\varkappa^{2\pi_\varkappa - 1}(p_\varkappa - 1),$$

je nachdem $\left(\frac{\psi}{p_\varkappa}\right) = +1$ oder $= -1$ ist.

Ist D nicht durch $p_\varkappa$ theilbar, so wird diese Summe nur dann nicht 0, wenn $\varpi_\varkappa = 1$ ist, und zwar wird

$$\Sigma \varpi_\varkappa^{\gamma_\varkappa} = p_\varkappa^{2\pi_\varkappa - 1}(p_\varkappa - 1)\left(1 - \left(\frac{D}{p_\varkappa}\right)\frac{1}{p_\varkappa}\right).$$

Damit also $\Sigma\tau(\psi(\xi, v))$ nicht verschwinde, ist nothwendig und hinreichend, dass $\tau(m)$ von der Form $\theta^{\frac{1}{2}(m-1)}\eta^{\frac{1}{8}(m^2-1)}\left(\frac{m}{P}\right)$ sei, wo θ, η die oben angegebenen Werthe haben und P ein Product aus lauter verschiedenen ungeraden Primfactoren von D ist (denjenigen nämlich, denen negative Wurzeln ϖ entsprechen); d. h. τ muss mit einem ambigen Charakter χ übereinstimmen. Es sei $\tau = \chi'(\Theta)$, wo Θ die Klasse bezeichnet, der die Form ψ angehört. Dann wird

$$\sum_{\xi, v} \tau(\psi(\xi, v)) = \chi'(\Theta) M \varphi(M) \Pi\left(1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

das Product Π erstreckt über alle Primfactoren p von M, welche in $2D$ nicht aufgehen.

Unter dieser Bedingung wird demnach

$$\Sigma \frac{\tau(\psi)}{\psi^{1+\varrho}} = \chi'(\Theta)\frac{\varphi(M)}{M}\frac{g}{\varrho}\Pi\left(1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p}\right) + \Phi(\varrho),$$

sonst einfach $= \Phi(\varrho)$,

$$L(\varrho) = \sum_\varkappa \chi(\Theta_\varkappa)\Sigma\frac{\tau(\psi_\varkappa)}{\psi_\varkappa^{1+\varrho}} = \frac{Hg}{\varrho}\frac{\varphi(M)}{M}\Pi\left(1 - \left(\frac{D}{p}\right)\frac{1}{p}\right) + \Sigma\chi(\Theta_\varkappa)\Phi_\varkappa(\varrho),$$

wo im ersten Falle $H = \sum_z \chi(\Theta_z)\chi'(\Theta_z)$, im zweiten $H = 0$. Nun ist aber (W. § 1) $\sum_z \chi(\Theta_z)\chi'(\Theta_z) = h$ oder $= 0$, je nachdem χ mit χ' identisch ist oder nicht; d. h. je nachdem $L(\varrho)$ erster Art ist oder nicht. Für eine Reihe zweiter oder dritter Art ist daher

$$L(\varrho) = \Sigma\chi(\Theta_z)\Phi_z(\varrho),$$

woraus die zu beweisende Eigenschaft folgt. —

11. Ist (W. § 6) für die Form

$$\psi = ax^2+bxy+cy^2,$$

in welcher a, b, c keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, $b^2-4ac = d^2$ ein Quadrat, so findet man leicht, dass durch dieselbe nur solche Primzahlen dargestellt werden können, welche einander congruent oder reciprok (socii nach *Euler*) (mod. d) sind, die daher in einer oder zwei arithmetischen Progressionen der Form $dx+e$ enthalten sind, und dass jede Primzahl von dieser Form durch ψ dargestellt werden kann. Hieraus ergiebt sich sofort, welcher Modification der Satz für diesen Fall bedarf.

Zürich, September 1886.

Ueber grösste Ganze.

(Von Herrn *E. Busche* in Bergedorf bei Hamburg.)

I.

Die Beziehung zwischen zwei Summen von grössten ganzen Zahlen, auf welche *Gauss* seinen dritten Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste gründet, lässt sich verallgemeinern.

Es seien die reellen Functionen $y = f_{21}(x)$ und deren inverse $x = f_{12}(y)$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ endlich, stetig und eindeutig. Die letztere Eigenschaft erfordert, dass y kein Maximum oder Minimum besitze; es möge diese Function zwischen $x = a$ und $x = b > a$ niemals abnehmen. Nach der *Gauss*schen Bezeichnung werde $[a]$ definirt durch die Bedingungen

$$a-1 < [a] \leqq a;$$

durch einen an die Klammer gesetzten Accent möge angedeutet werden, dass

$$a-1 \leqq [a]' < a$$

ist. Die Zahl a kann sowohl negativ als positiv sein. Bedeutet dann F eine beliebige Function, so ist *)

$$(\mathfrak{A}.) \qquad \sum_{x=[a]'+1}^{x=[b]'} F([f_{21}(x)], x) = \sum_{y=[f_{21}(a)]}^{y=[f_{21}(b)]} \sum_{\xi_y=[f_{12}(y)]'+1}^{\xi_y=[f_{12}(y+1)]'} F(y, \xi_y) \qquad (\xi^0=[a]'+1,\ \xi^x=[b]').$$

In der That ist der kleinste Werth von x, für welchen

$$[f_{21}(x)] = y,$$

also

$$f_{21}(x-1) < y \leqq f_{21}(x)$$

oder

$$x-1 < f_{12}(y) \leqq x$$

*) Ueber den Gebrauch des Accents in der Gleichung (𝔄.) gilt die allgemeine Regel, dass derselbe immer dann an die die inverse Function einschliessende Klammer zu setzen ist, wenn die ursprüngliche Function ihn nicht hat, und umgekehrt.

ist, der Werth

$$x = [f_{12}(y)]'+1,$$

und $[f_{21}(x)]$ bleibt constant gleich y bis zu dem Werthe $x = [f_{12}(y+1)]'$.

Für einen Werth von y, den $[f_{21}(x)]$ nicht annimmt, ist

$$[f_{12}(y)]'+1 > [f_{12}(y+1)]',$$

sodass dann die über ξ_y zu erstreckende Theilsumme verschwindet. Aus diesem Grunde darf auch der kleinste Werth von y gleich $[f_{21}(a)]$, der grösste gleich $[f_{21}(b)]$ gesetzt werden. Der kleinste Werth ξ^0 von allen ξ ist $[a]'+1$, der grösste $\xi^* = [b]'$, da bei der Bestimmung dieser extremen Werthe $f_{21}(a)$ statt $y = [f_{21}(a)]$ und $f_{21}(b)$ statt $y+1 = [f_{21}(b)]+1$ zu setzen ist. Statt der Summenzeichen kann man in (𝔄.) auch Productzeichen setzen.

Ist nun zuerst F unabhängig von dem zweiten Argument *), so kann (𝔄.) so geschrieben werden:

$$\sum_{x=[a]'+1}^{x=[b]'} F([f_{21}(x)]) = \sum_{y=[f_{21}(a)]}^{y=[f_{21}(b)]} F(y).([f_{12}(y+1)]'-[f_{12}(y)]'),$$

oder, wenn man bedenkt, dass statt $y = [f_{21}(a)]$ der Werth $f_{21}(a)$ und $f_{21}(b)$ statt $[f_{21}(b)]+1$ in der Klammer des zweiten Gliedes zu setzen ist:

$$(\mathfrak{a}.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{x=[a]'+1}^{x=[b]'} F([f_{21}(x)]) \\ = -F([f_{21}(a)]).[a]'+F([f_{21}(b)]).[b]'-\displaystyle\sum_{y=[f_{21}(a)]+1}^{y=[f_{21}(b)]} [f_{12}(y)]'.(F(y)-F(y-1)). \end{cases}$$

Als specielle Fälle dieser Gleichung werden sich elegante und nützliche Formeln offenbar besonders dann ergeben, wenn $F(y)-F(y-1)$ sich in einen einzigen einfachen Ausdruck zusammenziehen lässt. Setzt man z. B., um nur einen der allereinfachsten Fälle anzuführen, $f_{21}(x) = x^2$ und $F(x^2) = t^{x^2}$, wo t eine beliebige Grösse bezeichnet, so ist für $a = 0$, $b = n$ gleich einer ganzen Zahl:

$$\sum_{x=0}^{x=n-1} t^{x^2} = 1+(n-1).t^{n^2}-(t-1)\cdot\sum_{y=1}^{y=n^2}[y^{\frac{1}{2}}]'.t^{y-1}.$$

Für $F([f_{21}(x)]) = [f_{21}(x)]$ erhält man die aus der *Eisenstein*schen geometrischen Interpretation bekannte Gleichung

$$\sum_{x=[a]'+1}^{x=[b]'}[f_{21}(x)]+\sum_{y=[f_{21}(a)]+1}^{y=[f_{21}(b)]}[f_{12}(y)]' = -[f_{21}(a)].[a]'+[f_{21}(b)].[b]'.$$

Ich mache auf die Analogie aufmerksam, welche nicht nur in der

*) Vgl. die Abhandlung von *Dirichlet:* „Ueber ein die Division betreffendes Problem" dieses Journal Band 47, p. 151.

Form, sondern auch in der hier gegebenen Herleitung existirt zwischen dieser Gleichung und

$$\int_a^b f_{21}(x)\,dx = \int_{f_2(a)}^{f_{21}(b)} y\,.\,df_{12}(y) = -f_{21}(a)\,.\,a + f_{21}(b)\,.\,b - \int_{f_{21}(a)}^{f_{21}(b)} f_{12}(y)\,.\,dy.$$

II.

Die nächstliegende Anwendung der Gleichung (𝔄.) ist die auf das Reciprocitätsgesetz für die quadratischen Reste. Um mit Hülfe dieser Gleichung in einfacher Weise zum Beweise dieses Satzes zu gelangen, scheint es zweckmässig, die folgende Bestimmung des quadratischen Restcharakters zu Grunde zu legen.

Die ungerade positive Primzahl p ist quadratischer Rest oder Nichtrest der ungeraden positiven Primzahl q, je nachdem die Anzahl der Zahlen $1\cdot\frac{p}{2},\ 2\cdot\frac{p}{2},\ \ldots\ \frac{q-1}{2}\cdot\frac{p}{2}$, ***welche zwischen einem ungeraden und dem darauf folgenden geraden Vielfachen von*** $\frac{q}{2}$ ***gelegen sind, gerade oder ungerade ist.***

Diese Abänderung des *Gauss*schen Lemmas ergiebt sich unmittelbar aus demselben. Da nämlich

$$\frac{q-(2h+1)}{2}\cdot p = (p-1-\tau)\cdot\frac{q}{2} + \frac{q}{2} - r,$$

wenn

$$(2h+1)\cdot\frac{p}{2} = \tau\cdot\frac{q}{2} + r, \quad 0 < r < \frac{q}{2},$$

ist, so können die in dem ursprünglichen *Gauss*schen Lemma auftretenden Vielfachen von p, welche grösser als $\frac{1}{4}pq$ sind, durch ungerade Vielfache von $\frac{p}{2}$ ersetzt werden, die kleiner als $\frac{1}{4}pq$ sind, wenn $p-1-\tau \equiv \tau \pmod 2$, d. h. wenn p ungerade ist *).

Da

$$x\cdot\frac{p}{2} = \left[\frac{px}{q}\right]\frac{q}{2} + r, \quad 0 < r < \frac{q}{2}$$

*) Diese Bestimmung des quadratischen Restcharakters, in welcher $\frac{p}{2}$ und $\frac{q}{2}$ auch durch p und q ersetzt werden können, entspricht genau derjenigen Bestimmung des biquadratischen Restcharakters, welche *Gauss* in den Artt. 7, 8 von Nachlass III (Bd. II, p. 335) zuerst erwähnt.

ist, so ist also

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \prod_{x=1}^{x=\left[\frac{q}{2}\right]} (-1)^{\left[\frac{px}{q}\right]}.$$

Setzt man in (a.)

$$F([f_{21}(x)]) = (-1)^{[f_{21}(x)]} = (-1)^{\left[\frac{px}{q}\right]}, \quad a = 1, \quad b = \frac{q}{2}$$

und multiplicirt, statt zu addiren, so kommt

$$\prod_{x=1}^{x=\left[\frac{q}{2}\right]} (-1)^{\left[\frac{px}{q}\right]} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \cdot \prod_{y=1}^{y=\left[\frac{p}{2}\right]} (-1)^{\left[\frac{q\cdot y}{p}\right]},$$

wo die Accente, da weder $\frac{q}{2}$ noch $\frac{q\cdot y}{p}$ gleich einer ganzen Zahl sind, weggelassen werden dürfen.

Es ist also

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \cdot \left(\frac{q}{p}\right).$$

Hier möge erwähnt werden, dass aus dem modificirten *Gauss*schen Lemma sich das Reciprocitätsgesetz ohne jede Benutzung von Formeln ganz direct erkennen lässt.

Ist nämlich mindestens eine der Primzahlen, z. B. q, von der Form $4n+1$, so zerfallen die $\frac{q-1}{2}$ Vielfachen von $\frac{p}{2}$ in $\frac{q-1}{4}$ Paare von je zwei auf einander folgenden, deren erstes ungerade, deren zweites gerade ist. Von jedem Paare liegt dann jedesmal und nur dann ein einziges zwischen einem ungeraden und dem folgenden geraden Vielfachen von $\frac{q}{2}$, wenn zwischen den Zahlen des Paares eine ungerade Anzahl von Vielfachen von $\frac{q}{2}$ gelegen ist. Da alle in Betracht kommenden Vielfachen von $\frac{p}{2}$ und $\frac{q}{2}$, und nur diese, zwischen 0 und $\frac{pq}{4}$ liegen, und da etwa zwischen $\frac{q-1}{2}\frac{p}{2}$ und $\frac{q}{2}\frac{p}{2}$ liegende Vielfache von $\frac{q}{2}$ zu der charakteristischen Anzahl von q in Bezug auf p nicht mehr beitragen, so sind also in diesem Falle die beiden charakteristischen Anzahlen zugleich gerade oder ungerade.

Sind dagegen beide Primzahlen von der Form $4n+3$, und ist p die kleinere, so bestehen die Vielfachen von $\frac{p}{2}$ aus $\frac{q-3}{4}$ Paaren, für welche

dieselbe Ueberlegung gilt wie im vorigen Falle, und aus dem übrig bleibenden Vielfachen $\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p}{2}$. Das letztere liegt in dem Intervall von $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q}{2}$ bis $\frac{p}{2}\cdot\frac{q}{2}$, liefert also, da $\frac{p-1}{2}$ ungerade ist, den Beitrag 1 zu der charakteristischen Anzahl von p in Bezug auf q, während es die charakteristische Anzahl von q in Bezug auf p nicht afficirt, da zwischen $\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p}{2}$ und $\frac{q}{2}\cdot\frac{p}{2}$ kein Vielfaches von $\frac{q}{2}$ mehr liegt. In diesem Falle sind daher die beiden charakteristischen Anzahlen nach dem Modul 2 incongruent.

Dieser Beweis lässt sich sehr gut dadurch veranschaulichen, dass man die Vielfachen von $\frac{p}{2}$ und $\frac{q}{2}$ auf einer die Zahl $\frac{p}{2}\cdot\frac{q}{2}$ repräsentirenden Linie markirt.

III.

Die Identität (𝔄.) führt auch dann, wenn die Function F von dem zweiten Argument nicht unabhängig ist, zu interessanten Resultaten, von denen einige wenige, nicht so ganz naheliegende, hier noch angeführt werden mögen.

Zuerst sei

$$F([f_{21}(x)],\ x) = [f_{21}(x)]'^2.(-1)^x;$$

dann ist

$$\sum_{x=[a]'+1}^{x=[b]'}[f_{21}(x)]^2.(-1)^x = \sum_{y=[f_{21}(a)]}^{y=[f_{21}(b)]} y^2.((-1)^{[f_{12}(y)]'+1}+(-1)^{[f_{12}(y)]'+2}+\cdots+(-1)^{[f_{12}(y+1)]'})$$

und, da

$$(-1)^{[f_{12}(y)]'+1}+(-1)^{[f_{12}(y)]'+2}+\cdots+(-1)^{[f_{12}(y+1)]'} \equiv [f_{12}(y)]'^2-[f_{12}(y+1)]'^2 \pmod 4,$$

$$y^2-(y-1)^2 \equiv -(-1)^y \pmod 4$$

ist, so folgt, indem man rechts wieder das erste und das letzte Glied abtrennt und dabei die besonderen Werthe von y, resp. $y+1$ in dem ersten $[f_{12}(y)]'$ und dem letzten $[f_{12}(y+1)]'$ berücksichtigt,

$$\sum_{x=[a]'+1}^{x=[b]'}[f_{21}(x)]^2.(-1)^x+\sum_{y=[f_{21}(a)]+1}^{y=[f_{21}(b)]}[f_{12}(y)]'^2.(-1)^y \equiv [a]'^2.[f_{21}(a)]^2-[b]'^2.[f_{21}(b)]^2$$

$$\pmod 4.$$

So ist z. B.

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right]^2.(-1)^x + \sum_{y=1}^{y=\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qy}{p}\right]^2.(-1)^y \equiv -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.\left(\frac{q-1}{2}\right)^2 \pmod 4.$$

Die Herleitung dieser Gleichung scheint mir vorbildlich zu sein für einen Beweis des biquadratischen Reciprocitätsgesetzes, welcher mit dem dritten *Gauss*schen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes Aehnlichkeit besitzt; man kann nämlich den Decidenten durch einen Ausdruck darstellen, in welchem derartige Summen vorkommen.

Es seien ferner

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0$$

zwei Gleichungen, aus denen sich durch Elimination

$$x = f_{12}(y) = f_{13}(z),$$
$$y = f_{23}(z) = f_{21}(x),$$
$$z = f_{31}(x) = f_{32}(y)$$

als zwischen den Grenzen

$$x = a, \quad x = b > a$$

endliche, stetige, eindeutige Functionen ergeben. Offenbar ist

$$f_{12}(f_{21}(x)) = x, \quad \text{u. s. w.}, \quad f_{12}(f_{23}(z)) = f_{13}(z), \quad \text{u. s. w.}$$

Setzt man in (𝔄.)

$$F([f_{21}(x)],\ x) = [f_{21}(x)][f_{31}(x)],$$

so ergiebt sich hiernach leicht

$$\sum_{x=[a]'+1}^{x=[b]'} [f_{21}(x)][f_{31}(x)] = \sum_{y=[f_{21}(a)]}^{y=[f_{21}(b)]} \sum_{\xi_y=[f_{12}(y)]'+1}^{\xi_y=[f_{12}(y+1)]'} y.[f_{31}(\xi_y)]$$

$$= \sum_{y=[f_{21}(a)]}^{y=[f_{21}(b)]} y.\Big\{-[f_{32}(y)].[f_{12}(y)]' + [f_{32}(y+1)][f_{12}(y+1)]' - \sum_{\zeta_y=[f_{32}(y)]+1}^{\zeta_y=[f_{32}(y+1)]} [f_{13}(\zeta_y)]'\Big\}$$

$$= -[a]'.[f_{21}(a)].[f_{31}(a)] + [b]'.[f_{21}(b)].[f_{31}(b)] - \sum_{y=[f_{21}(a)]+1}^{y=[f_{21}(b)]} [f_{32}(y)][f_{12}(y)]'$$

$$- \sum_{y=[f_{21}(a)]}^{y=[f_{21}(b)]} \sum_{\zeta_y=[f_{32}(y)]+1}^{\zeta_y=[f_{32}(y+1)]} y.[f_{13}(\zeta_y)]'.$$

Da nun nach (𝔄.)

$$\sum_{z=[f_{31}(a)]+1}^{z=[f_{31}(b)]} [f_{23}(z)]'.[f_{13}(z)]' = \sum_{y=[f_{21}(a)]}^{y=[f_{21}(b)]} \sum_{\zeta_y=[f_{32}(y)]+1}^{\zeta_y=[f_{32}(y+1)]} y.[f_{13}(\zeta_y)]'$$

ist, so erhält man die symmetrische Gleichung

$$(\mathfrak{a}'.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{x=[a]'+1}^{x=[b]'} [f_{21}(x)].[f_{31}(x)] + \sum\limits_{y=[f_{21}(a)]+1}^{y=[f_{21}(b)]} [f_{32}(y)].[f_{12}(y)]' + \sum\limits_{z=[f_{31}(a)]+1}^{z=[f_{31}(b)]} [f_{13}(z)]'.[f_{23}(z)]' \\ \qquad = -[a]'.[f_{21}(a)].[f_{31}(a)] + [b]'.[f_{21}(b)].[f_{31}(b)]. \end{cases}$$

Sind z. B. p, q, r drei positive theilerfremde ungerade Zahlen, und setzt man

$$x = \frac{p}{q}y = \frac{p}{r}z; \quad y = \frac{q}{r}z = \frac{q}{p}x; \quad z = \frac{r}{p}x = \frac{r}{q}y; \quad a = 1, \quad b = \frac{p}{2},$$

so ist

$$(\mathfrak{a}''.)\quad \sum_{x=1}^{x=\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qx}{p}\right].\left[\frac{rx}{p}\right] + \sum_{y=1}^{y=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{ry}{q}\right].\left[\frac{py}{q}\right] + \sum_{z=1}^{z=\frac{r-1}{2}} \left[\frac{pz}{r}\right].\left[\frac{qz}{r}\right] = \frac{p-1}{2}.\frac{q-1}{2}.\frac{r-1}{2}.$$

Da

$$\sum_{y=1}^{y=\left[\frac{qx}{p}\right]} \left[\frac{ry}{q}\right] + \sum_{z=1}^{z=\left[\frac{rx}{p}\right]} \left[\frac{qz}{r}\right] = \left[\frac{qx}{p}\right].\left[\frac{rx}{p}\right] \text{ u. s. w.}$$

ist, so kann man die Gleichung ($\mathfrak{a}''.$) auch so schreiben:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{p-1}{2}} \sum_{y=1}^{y=\left[\frac{qx}{p}\right]} \left[\frac{ry}{q}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{p-1}{2}} \sum_{z=1}^{z=\left[\frac{rx}{p}\right]} \left[\frac{qz}{r}\right] + \sum_{y=1}^{y=\frac{q-1}{2}} \sum_{z=1}^{z=\left[\frac{ry}{q}\right]} \left[\frac{pz}{r}\right] + \sum_{y=1}^{y=\frac{q-1}{2}} \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{py}{q}\right]} \left[\frac{rx}{p}\right]$$
$$+ \sum_{z=1}^{z=\frac{r-1}{2}} \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{pz}{r}\right]} \left[\frac{qx}{p}\right] + \sum_{z=1}^{z=\frac{r-1}{2}} \sum_{y=1}^{y=\left[\frac{qz}{r}\right]} \left[\frac{py}{q}\right] = \frac{p-1}{2}.\frac{q-1}{2}.\frac{r-1}{2}.$$

Die Gleichung ($\mathfrak{a}'.$), welche auch mit Hülfe der *Eisenstein*schen geometrischen Methode leicht gefunden werden kann, scheint mir wegen ihrer Herleitung von Interesse zu sein. Bei derselben kann man sich nämlich Schritt für Schritt leiten lassen durch

$$\int_a^b f_{21}(x) f_{31}(x)\, dx = \int_{f_{21}(a)}^{f_{21}(b)} y \,.\, f_{32}(y)\, df_{12}(y) \quad \left(= \int_{f_{21}(a)}^{f_{21}(b)} \int_{f_{13}(y)}^{f_{12}(y)+df_{12}(y)} y.f_{31}(\xi).d\xi\right)$$
$$= -a.f_{21}(a).f_{31}(a) + b.f_{21}'(b).f_{31}(b) - \int_{f_{21}(a)}^{f_{21}(b)} f_{32}(y).f_{12}(y)\, dy$$
$$- \int_{f_{21}(a)}^{f_{21}(b)} y.f_{12}(y).df_{32}(y),$$

$$\int_{f_{21}(a)}^{f_{31}(b)} y \,.\, f_{12}(y)\, df_{32}(y) = \int_{f_{31}(a)}^{f_{31}(b)} f_{23}(z).f_{13}(z)\, dz.$$

Ebenso wie die entsprechende Integralgleichung sich auf beliebig viele Functionen $x_\mu = f_{\mu\nu}(x_\nu)$ erweitern lässt, lässt sich eine der Gleichung ($\mathfrak{a}.$) genau analoge allgemeinere Gleichung in derselben Weise herleiten.

Diese Analogie zwischen der in den vorliegenden Zeilen angedeuteten Behandlung der Summen von grössten Ganzen und der Rechnung mit Integralen zeigt, dass auch bei der, so zu sagen, gewaltsamen Beschränkung der Functionen $[f_{21}(x)]$ u. s. w. auf das Gebiet des Argumentes der grosse Vortheil einer solchen Uebereinstimmung zwischen den Werthen der Function und denen des Argumentes sich noch geltend macht, der in allen Zweigen der Mathematik zu Tage tritt.

Im Februar 1886.

Berichtigung. In meiner Arbeit: „Ueber eine Formel des Herrn *Hermite*“ (Bd. 100) befindet sich ein Versehen. Die dort gegebene Bestimmung des *Jacobi*schen Zeichens gilt nur dann, wenn *beide* Zahlen ungerade sind.

Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen.

(Von Herrn *Mathias Lerch* in Prag.)

In dieser Note wollen wir die Reihen von der Form

$$(1.) \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cos a_\nu \pi x$$

in Bezug auf die Existenz eines bestimmten endlichen Differentialquotienten untersuchen, wobei

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_\nu, \quad \ldots$$

ganze positive Zahlen sind, von denen vorausgesetzt wird, dass es eine unendliche Reihe von einander verschiedener ganzer Zahlen

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \ldots \quad b_\nu, \quad \ldots$$

giebt, für welche die Quotienten $\frac{a_{\nu+\varkappa}}{b_\nu}$ $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$ ganze Zahlen sind, während $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ gebrochen sein kann. Die c_ν sollen Glieder einer absolut convergirenden Reihe ausmachen.

Es wird sich zeigen, dass es unter den Functionen (1.) unendlich viele giebt, die an allen Stellen von der Form $x = \frac{a}{b_m}$ (a bedeutet eine ganze Zahl) keinen bestimmten Differentialquotienten besitzen. Nun sind die eben erwähnten Stellen in jedem noch so kleinen Intervalle des Argumentgebietes in unendlicher Anzahl vorhanden, sodass wir es hier also mit Functionen zu thun haben, welche mit den mit Hülfe des *Hankel*schen Condensationsprincips construirten Functionen eine analoge Eigenschaft gemein haben, jedoch sind sie durch einfachere Ausdrücke dargestellt, weshalb sie eine sehr elementare Behandlung zulassen.

Unter den Reihen von der Form (1.) giebt es auch solche, die an keiner Stelle überhaupt einen bestimmten Differentialquotienten besitzen,

namentlich die von Herrn *Weierstrass* aufgestellte *) und von Herrn *Chr. Wiener* **) ausführlich untersuchte Function, die sich hier als ein ganz specieller Fall einer unten anzugebenden Reihe ergiebt.

1. Setzt man in die Reihe (1.) den Werth

$$x = x_0 + h, \quad x_0 = \frac{a}{b_m}$$

ein, wobei a eine ganze Zahl bedeuten soll, so erhält man:

$$f(x_0+h) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \cos a_\nu \pi (x_0+h) + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (-1)^{\frac{aa_\nu}{b_m}} c_\nu \cos a_\nu h\pi$$

und für $h = 0$:

$$f(x_0) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \cos a_\nu \pi x_0 + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (-1)^{\frac{aa_\nu}{b_m}} c_\nu,$$

sodass also:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \frac{\cos a_\nu \pi (x_0+h) - \cos a_\nu \pi x_0}{h} + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (-1)^{\frac{aa_\nu}{b_m}} c_\nu \frac{\cos a_\nu \pi h - 1}{h}.$$

Nun ist klar, dass sich bei unendlich klein werdendem h die erste Summe rechts dem ganz bestimmten Grenzwerthe

$$-\pi \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu c_\nu \sin a_\nu \pi x_0$$

nähert, und es nähert sich also der Differenzenquotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ einer bestimmten Grösse oder nicht, je nachdem die Reihe

$$(2.) \qquad \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (-1)^{\frac{aa_\nu}{b_m}} c_\nu \frac{\cos a_\nu h\pi - 1}{h}$$

für unendlich kleine h einen endlichen Grenzwerth besitzt oder nicht.

Sind nun die Quotienten $\frac{a_\nu}{b_m}$ $(\nu > m)$ von einem bestimmten an immer gleicher Parität, so zerfällt die Reihe (2.) sowohl für gerade als auch für

---

*) Brief an Herrn *P. du Bois-Reymond*. Dieses Journal Bd. 79. — Abhandlungen aus der Functionenlehre, Berlin, Springer, 1886, p. 97.

**) Dieses Journal Bd. 90. — In der Functionenlehre des Herrn *Weierstrass* findet sich auf S. 100 eine Bemerkung, aus der man schliessen könnte, dass Herr *Wiener* das *Weierstrass*sche Resultat für unrichtig halte. Diese Bemerkung bezieht sich indes nicht auf Herrn *Wiener;* denn derselbe bemerkt im citirten Aufsatze (p. 247), dass die Ergebnisse des Herrn *Weierstrass* und die seinigen zugleich stattfinden, wenn man sich auf den von Herrn *Weierstrass* doch allein untersuchten Fall (nämlich $ab > \frac{3}{2}\pi + 1$) beschränkt.

ungerade a in zwei Theile, von welchen der eine aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, während der andere eine unendliche Reihe ist, die bis auf das Vorzeichen mit dem Reste der Reihe

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{\cos a_\nu \pi h - 1}{h}$$

übereinstimmt. Der erste, endliche Bestandtheil besitzt für $\lim h = 0$ immer einen endlichen Grenzwerth, und der zweite nähert sich einer bestimmten Grösse dann und nur dann, wenn der Grenzwerth

$$\lim_{h=0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

existirt, d. h. wenn die Function $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ einen bestimmten endlichen Differentialquotienten besitzt.

Giebt es aber unter den Zahlen $\frac{a_\nu}{b_m}$ $(\nu > m)$ unendlich viele gerade und ebenso ungerade, so hat man für a nur eine gerade ganze Zahl zu wählen, um zu demselben Resultate zu gelangen. Also:

„Die durch die Reihe (1.) *dargestellte Function der reellen Veränderlichen x verhält sich in Bezug auf die Existenz oder Nichtexistenz eines bestimmten Differentialquotienten an den Stellen $x = \frac{a}{b_m}$, unter a eine gerade ganze Zahl, und wenn es unter den Zahlen $\frac{a_\nu}{b_m}$ $(\nu > m)$ nur eine endliche Anzahl gerader oder ungerader giebt, eine beliebige ganze Zahl verstanden, in derselben Weise, wie an der Stelle $x = 0$.“*

Nun ist offenbar

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = -2\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a_\nu \pi x}{x},$$

also

$$(3.) \qquad \frac{f(-x)-f(0)}{-x} = -\frac{f(x)-f(0)}{x};$$

besitzt aber die Function $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ einen endlichen Differentialquotienten, so ist derselbe gleich

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x=0} \frac{f(-x)-f(0)}{-x},$$

und fällt nach (3.) mit seinem entgegengesetzten Werthe zusammen, und ist deshalb gleich Null.

Ist also die Bedingung

$$(3^a.) \qquad \lim_{x=0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$$

nicht erfüllt, so hat die Function $f(x)$ an der Stelle $x=0$ keinen bestimmten endlichen Differentialquotienten.

Wendet man dies auf den Rest der Reihe (2.) an, so erhält man den Satz, dass

„wenn die Function $f(x)$ an der betrachteten Stelle $x_0 = \frac{a}{b_m}$ einen bestimmten Differentialquotienten besitzt, derselbe durch die Formel

$$f'(x_0) = -\sum_{\nu=0}^{m} \pi a_\nu c_\nu \sin a_\nu \pi x_0$$

dargestellt wird.“

Mit Ausnahme des hier auszuschliessenden Falles der gleichmässigen Convergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu c_\nu \sin a_\nu \pi x$$

ist uns kein allgemeines Criterium für die Geltung der Gleichung $(3^a.)$ bekannt. In manchen Fällen gelingt es aber, die Unzulässigkeit der Gleichung $(3^a.)$ in der Weise darzulegen, dass man an die Stelle des stetigen Grenzüberganges $\lim x = 0$ einen unstetigen, durch eine unendliche Folge von schliesslich unendlich klein werdenden Grössen x' erzeugten Grenzübergang $\lim x' = 0$ treten lässt.

Setzt man z. B.

$$x' = \frac{k}{b_r},$$

so folgt:

$$(4.) \qquad \frac{f(x')-f(0)}{x'} = -\frac{2b_r}{k} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \sin^2 \frac{a_\nu k \pi}{2b_r}.$$

Giebt es nun unter den Quotienten $\frac{a_\nu}{2b_r}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots \infty)$ bei unendlich vielen b_r auch solche, deren absolut kleinsten Reste unter eine feste Grenze α nicht herabsinken, sie mögen dem Werthe $\nu = \nu'$ entsprechen, und sind die c_ν sämmtlich positiv und so beschaffen, dass bei allen den betrachteten b_r unter den betreffenden Grössen $b_r c_{\nu'}$ immer einige vorhanden sind, die für $r = \infty$ nicht unendlich klein werden, so darf die rechte Seite von (4.) nicht unendlich abnehmen für sämmtliche unendlich grossen Werthe von r,

und es wird also der Differenzenquotient $\frac{f(x')-f(0)}{x'}$ zugleich mit x' nicht unendlich klein werden können, wenn k ungerade ist.

Die hier angeführten Bedingungen werden z. B. erfüllt sein, wenn man

$$a_\nu = \nu!, \quad b_r = (r+1)!$$

setzt, und zwar ist hier $\nu' = r+1$, da

$$\frac{a_{\nu'}}{2b_r} = \tfrac{1}{2}$$

ist. Also hat man den Satz:

„Giebt es unter den positiv vorausgesetzten Grössen α_ν unendlich viele, die unter eine gewisse Grenze $\varrho > 0$ nicht herabsinken, so hat die absolut convergent vorausgesetzte Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} \cos \nu! \pi x$$

für keinen rationalen Werth von x einen bestimmten Differentialquotienten.“

Denn der Satz gilt von der Stelle $x = 0$, und da die Quotienten $\frac{a_\nu}{b_m}$ $(\nu \geqq m+3)$ sämmtlich gerade sind, so gilt er auch für alle Werthe von der Form $x = \frac{a}{m!}$, auf die sich alle rationalen Brüche bringen lassen.

Analoge Beispiele sind leicht zu bilden.

2. Minder einfach ist die Untersuchung der Reihe (1.) in Bezug auf ihre Differentiirbarkeit an einer beliebigen Stelle x; wir wollen uns hier auf einen einfachen Fall beschränken. Wir nehmen nämlich a_ν in der Form

$$(1.) \qquad a_\nu = p_0 p_1 p_2 \ldots p_\nu$$

an, unter den p positive ungerade Zahlen verstanden, die von einander verschieden oder theilweise oder auch sämmtlich einander gleich sind, jedoch mit Ausnahme der ersten grösser als 1 sein müssen. Wir bilden dann die Reihe

$$(2.) \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cos a_\nu \pi x,$$

in welcher die c_ν nicht negative Grössen sind, die eine endliche Summe besitzen, und benutzen zu ihrer Untersuchung die von Herrn *Weierstrass* in seinem oben erwähnten Briefe an Herrn *P. du Bois-Reymond* zuerst dargelegte Methode.

Es sei x eine gegebene reelle Grösse; dann giebt es eine ganze Zahl α_m, für welche die Differenz

$$a_m x - \alpha_m = x_{m+1}$$

die Ungleichheit befriedigt:

$$-\tfrac{1}{2} < x_{m+1} \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Man erhält so x in der Form

$$x = \frac{\alpha_m + x_{m+1}}{a_m},$$

und wenn man

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a_m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a_m}$$

setzt, so folgt

$$x' - x = -\frac{1 + x_{m+1}}{a_m}, \quad x'' - x = \frac{1 - x_{m+1}}{a_m},$$

sodass $x' - x$ negativ, $x'' - x$ positiv ist, und diese beiden Grössen für $m = \infty$ unendlich klein werden. Nun ist offenbar

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu \pi \frac{\cos a_\nu \pi x' - \cos a_\nu \pi x}{\pi a_\nu (x' - x)} + \sum_{\nu=m}^{\infty} c_\nu \frac{\cos a_\nu \pi x' - \cos a_\nu \pi x}{x' - x}.$$

Da aber für $\nu \geqq m$:

$$a_\nu x' = \frac{a_\nu (\alpha_m - 1)}{a_m}$$

eine ganze Zahl ist, und zwar von derselben Parität wie $(\alpha_m - 1)$, und da ausserdem

$$a_\nu x = \frac{a_\nu}{a_m} \alpha_m + \frac{a_\nu x_{m+1}}{a_m},$$

sodass für $\nu \geqq m$:

$$\cos a_\nu \pi x' = -(-1)^{\alpha_m},$$

$$\cos a_\nu \pi x = (-1)^{\alpha_m} \cos \frac{\pi a_\nu x_{m+1}}{a_m},$$

so folgt, da ausserdem

$$x' - x = -\frac{1 + x_{m+1}}{a_m},$$

offenbar die Formel

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \pi \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu \frac{\cos a_\nu \pi x' - \cos a_\nu \pi x}{a_\nu \pi (x' - x)}$$
$$+ (-1)^{\alpha_m} \frac{a_m}{1 + x_{m+1}} \sum_{\nu=m}^{\infty} c_\nu \left(1 + \cos \frac{a_\nu \pi x_{m+1}}{a_m}\right).$$

Ganz analog findet man:

$$\frac{f(x'')-f(x)}{x''-x} = \pi \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu \frac{\cos a_\nu \pi x'' - \cos a_\nu \pi x}{a_\nu \pi (x''-x)}$$
$$-(-1)^{a_m} \frac{a_m}{1-x_{m+1}} \sum_{\nu=m}^{x} c_\nu \Big(1+\cos \frac{\pi a_\nu x_{m+1}}{a_m}\Big),$$

und daher kommt

$$(3.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} - \frac{f(x'')-f(x)}{x''-x} \\ &= \pi \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu \Big(\frac{\cos a_\nu \pi x' - \cos a_\nu \pi x}{a_\nu \pi (x'-x)} - \frac{\cos a_\nu \pi x'' - \cos a_\nu \pi x}{a_\nu \pi (x''-x)} \Big) \\ &\quad +2(-1)^{a_m} \frac{a_m}{1-x_{m+1}^2} \sum_{\nu=m}^{x} c_\nu \Big(1+\cos \frac{\pi a_\nu x_{m+1}}{a_m}\Big). \end{aligned} \right.$$

Der erste Bestandtheil rechts ist offenbar von der Form

$$(\alpha.) \qquad \pi \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu (\sin a_\nu \pi \xi'' - \sin a_\nu \pi \xi'),$$

wobei ξ', ξ'' eine bestimmte Grösse innerhalb des Intervalles $(x \ldots x')$, resp. $(x \ldots x'')$ bezeichnet. Nun ist offenbar der absolute Betrag der Grösse $(\alpha.)$ nie grösser als

$$\pi \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu \left| \frac{\sin a_\nu \pi \xi'' - \sin a_\nu \pi \xi'}{a_\nu \pi (\xi''-\xi')} \right| \cdot a_\nu \pi (\xi''-\xi') \leqq \pi^2 \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu^2 c_\nu (\xi''-\xi'),$$

und da

$$\xi''-\xi' \leqq x''-x' = \frac{2}{a_m},$$

so ist die Grösse $(\alpha.)$ dem absoluten Betrage nach nie grösser als

$$(\alpha^*.) \qquad \frac{2\pi^2}{a_m} \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu^2 c_\nu.$$

Dagegen ist der zweite Bestandtheil der rechten Seite in (3.) seinem absoluten Betrage nach nicht kleiner als

$$\frac{2a_m c_m}{1-x_{m+1}^2} \geqq 2a_m c_m,$$

weil die dort vorkommende Reihe aus positiven Gliedern besteht, von denen das erste, nämlich $c_m(1+\cos \pi x_{m+1})$, nicht kleiner als c_m ist, da $|x_{m+1}| \leqq \frac{1}{2}$ angenommen wurde.

Daher kann man schreiben:

$$(4.) \qquad \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} - \frac{f(x'')-f(x)}{x''-x} = \frac{2\pi^2}{a_m} \vartheta \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu^2 c_\nu + 2(-1)^{a_m} a_m c_m \eta,$$

wobei ϑ ein positiver oder negativer echter Bruch ist, und η eine positive nie unter die Einheit herabsinkende Grösse bedeutet.

Besitzt die Function $f(x)$ an der Stelle x einen bestimmten endlichen Differentialquotienten, so muss die linke Seite von (4.) für $m = \infty$ unendlich klein werden. Bestimmt man die c_ν so, dass $a_m c_m$ und zu gleicher Zeit die Differenz

$$(\beta.) \qquad a_m c_m - \frac{\pi^2}{a_m} \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu^2 c_\nu,$$

die positiv vorausgesetzt wird, für $m = \infty$ nicht unendlich klein wird, so wird die Grösse (4.) nicht für unendlich grosse Werthe von m unendlich klein, und die Function $f(x)$ besitzt dann an keiner Stelle einen bestimmten endlichen Differentialquotienten.

Ist nun

$$d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad \ldots \quad d_m, \quad \ldots$$

eine beliebige Folge von positiven Grössen, von denen unendlich viele unter eine bestimmte Grenze d nicht hinabsinken, so kann man die c_ν so bestimmen, dass die Grösse ($\beta.$) gleich d_m wird, und es wird dann die betreffende Function $f(x)$ zu den nicht differentiirbaren gehören. Um dies zu erreichen, hat man bloss

$$a_\nu^2 c_\nu = u_\nu, \quad a_\nu d_\nu = v_\nu$$

zu setzen und die u_ν aus den v_ν mit Hülfe der Recursionsformel

$$(\beta^*.) \qquad u_m - \pi^2 \sum_{\nu=0}^{m-1} u_\nu = v_m$$

zu berechnen.

Hier möge noch ein dem *Weierstrass*schen ähnliches Verfahren zur Aufstellung eines speciellen Systems der c_ν Platz finden. Setzt man nämlich

$$a_\nu^2 c_\nu = r^\nu,$$

so ist die Grösse ($\beta.$) gleich

$$\frac{1}{a_m}\left(r^m - \pi^2 \sum_{\nu=0}^{m-1} r^\nu\right) = \frac{r^m}{a_m}\left(1 - \frac{\pi^2}{r-1}\right) + \frac{\pi^2}{a_m(r-1)},$$

und sie wird immer positiv und für $m = \infty$ nicht unendlich klein, wenn

$$(\gamma.) \qquad 1 - \frac{\pi^2}{r-1}$$

positiv ist und $\frac{r^m}{a_m}$ für $m = \infty$ nicht verschwindet. Die letztere Bedingung wird aber nur bei speciellen Werthsystemen der a_ν erfüllbar sein. Dies ist z. B. der Fall, wenn die p_ν sich wiederholen, sodass sie nur eine endliche

Anzahl verschiedener Werthe erhalten. Ist die grösste unter den Zahlen p_ν gleich p, so ist

$$\frac{r^m}{a_m} \geqq \frac{r^m}{p^{m+1}},$$

und die rechte Seite wird dann und nur dann nicht unendlich klein für $m = \infty$, wenn

$$r \geqq p$$

ist. Wenn also in dem letzterwähnten Falle $r \geqq p$ und zugleich der Bedingung (γ.) zufolge $r > 1+\pi^2$ ist, so hat die Function $f(x)$, in welcher

$$c_\nu = \frac{r^\nu}{a_\nu^2},$$

an keiner Stelle einen endlichen Differentialquotienten. Die Convergenzbedingung für die betrachtete Reihe stellt wohl für die Grösse r eine obere Grenze auf.

So wird z. B. die *Weierstrass*sche Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu \cos a^\nu \pi x,$$

in der $b < 1$, a eine ungerade ganze Zahl ist, an keiner Stelle einen bestimmten endlichen Differentialquotienten haben können, wenn die zwei Bedingungen

$$ab \geqq 1, \quad a^2 b > 1+\pi^2$$

erfüllt sind. Dieses Criterium ist aber umfassender als das von Herrn *Weierstrass* aufgestellte, nämlich die Erfüllung der Ungleichheit:

$$ab > 1+\tfrac{3}{2}\pi.$$

Um ein specielles Werthsystem der c_ν auch bei irgend welchen p_ν zu erhalten, wollen wir dies durch den Ansatz

$$a_\nu c_\nu = r^\nu$$

zu bewerkstelligen versuchen.

Da vermöge der Bedeutung der a_ν die Ungleichheit

$$a_m c_m - \frac{\pi^2}{a_m} \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu^2 c_\nu > a_m c_m - \frac{\pi^2}{p_m} \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu$$

stattfindet, so erhält man für die Nichtdifferentiirbarkeit von $f(x)$ eine hinreichende Bedingung, wenn man r so bestimmt, dass die Grösse

$$(\delta.) \qquad r^m - \frac{\pi^2}{p_m} \sum_{\nu=0}^{m-1} r^\nu = r^m\left(1 - \frac{\pi^2}{p_m(r-1)}\right) + \frac{\pi^2}{p_m(r-1)}$$

positiv ist und für $m = \infty$ nicht verschwindet.

In dem allgemeinen Falle, wo die p_ν nicht unter einer festen Grenze liegen, wird diese Bedingung dadurch erfüllt, dass man $r > 1$ voraussetzt. Also haben wir den Satz:

„Sind

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots$$

ungerade ganze Zahlen, die nicht unter einer festen Grenze liegen, und ist $r > 1$ *eine positive Grösse, so wird die absolut convergent vorausgesetzte Reihe*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^\nu}{a_\nu} \cos a_\nu \pi x, \quad a_\nu = p_0 p_1 p_2 \ldots p_\nu$$

eine Function darstellen, die an keiner Stelle einen bestimmten endlichen Differentialquotienten besitzt.“ —

Schliesslich betrachten wir den Fall, wo die p_ν so gewählt werden, dass für alle ν:

$$a_\nu \geqq a_{\nu-1}^2$$

ist. Dann gilt die Ungleichung

$$a_m c_m - \frac{\pi^2}{a_m} \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu^2 c_\nu > a_m c_m - \pi^2 \sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu;$$

wir setzen $a_m c_m = d_m$ und bekommen folgendes Resultat:

„Giebt es unter den positiven Grössen

$$d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad \ldots \quad d_m, \quad \ldots$$

unendlich viele, die oberhalb einer festen Grenze ϱ *liegen, und convergirt die Reihe*

$$(\varepsilon.) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_\nu}{a_\nu},$$

so wird die Function

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_\nu}{a_\nu} \cos a_\nu \pi x,$$

falls jedes a_ν *durch* $a_{\nu-1}$ *theilbar ist und unter* $a_{\nu-1}^2$ *nicht herabsinkt, für keinen Werth von* x *einen bestimmten Differentialquotienten haben können.“*

Denn der vorausgesetzten Convergenz der Reihe ($\varepsilon.$) nach kann man eine ganze Zahl n so wählen, dass für $\frac{d_\nu}{a_\nu} = c_\nu$

$$\pi^2 \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu < \tfrac{1}{2} \varrho.$$

Ausserdem wird man der vorausgesetzten Beschaffenheit der Grössen d gemäss unendlich viele ganze Zahlen m so angeben können, dass die Ungleichung

$$a_{n+m}c_{n+m} = d_{n+m} > \varrho$$

stattfindet; es wird hier also für unendlich viele Werthe von m

$$a_{n+m}c_{n+m} - \pi^2 \sum_{\nu=n}^{n+m-1} c_\nu > \tfrac{1}{2}\varrho$$

sein, und also für unser specielles Werthsystem der a_ν um so mehr

$$a_{n+m}c_{n+m} - \frac{\pi^2}{a_{n+m}} \sum_{\nu=n}^{n+m-1} a_\nu^2 c_\nu > \tfrac{1}{2}\varrho,$$

woraus folgt, dass die Reihe

$$(\vartheta.) \qquad \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu \cos a_\nu \pi x$$

an keiner Stelle einen bestimmten endlichen Differentialquotienten haben kann. Dasselbe muss aber bei der zuletzt betrachteten Reihe $f(x)$ der Fall sein, da sie sich von der Reihe $(\vartheta.)$ nur um eine differentiirbare Function unterscheidet.

3. Schliesslich mag hier kurz eine Reihe erwähnt werden, welche Ableitungen aller Ordnungen besitzt, und doch nie nach ganzen positiven Potenzen von $(x-x_0)$ entwickelt werden kann, was auch x_0 sei.

Solche Reihen sind zum ersten Male von Herrn ***P. du Bois-Reymond*** im 22. Bande der ***Math. Annalen*** aufgestellt worden; da sich aber die von uns hier zu behandelnde Reihe durch eine einfache Gestalt auszeichnet, so dürfte sie wohl einige Leser interessiren.

Es ist dies die Reihe

$$(1.) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos a^n x}{n!},$$

unter a eine ungerade ganze Zahl verstanden. Sie convergirt offenbar ebenso wie alle ihre Ableitungen*) gleichmässig, und deshalb ist sie nach einem bekannten Satze gliedweise differentiirbar. Bedeutet b eine ungerade ganze Zahl, und schreibt man $x_0 = \frac{b\pi}{a^m}$, so bekommt man für die Ableitungen von $f(x)$ an der Stelle x_0 die Formeln:

*) Unter „Ableitung“ ist die durch gliedweise Differentiation entstandene Reihe verstanden.

$$(-1)^k f^{(2k)}(x_0) = \varphi(a^{2k}) - e^{a^{2k}},$$
$$(-1)^{k+1} f^{(2k+1)}(x_0) = \psi(a^{2k+1}),$$

wo der Kürze halber

$$\varphi(a^{2k}) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a^{2kn}}{n!} (\cos a^{n-m} b\pi - 1),$$
$$\psi(a^{2k+1}) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a^{(2k+1)n}}{n!} \sin a^{n-m} b\pi$$

gesetzt worden ist.

Die *Taylor*sche Reihe für die Function $f(x)$ setzt sich nun aus folgenden drei Reihen zusammen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi(a^{2k}) \frac{(x-x_0)^{2k}}{(2k)!},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \psi(a^{2k+1}) \frac{(x-x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{a^{2k}} \frac{(x-x_0)^{2k}}{(2k)!}.$$

Die beiden ersten dieser drei Reihen sind absolut convergent, wie man unmittelbar sieht, und von der dritten soll gezeigt werden, dass sie divergirt, wie klein auch $(x-x_0)$ sein mag. Setzen wir zu diesem Zwecke

$$|x-x_0| = \frac{1}{y}$$

und nehmen $y > 1$ an, so ist der Ausdruck

$$\frac{e^{a^\nu}}{y^\nu \nu!} > \frac{e^{a^\nu}}{(y\nu)^\nu} = u_\nu$$

für unendlich grosse ν zu untersuchen. Nun ist aber für hinlänglich grosse Werthe von ν:

$$u_\nu = e^{a^\nu - \nu \log \nu y} > e^{a^\nu - \nu^2},$$

und da die letztere Grösse schliesslich jede Grenze übertrifft, so gilt dies um so mehr von der Grösse

$$\frac{e^{a^\nu}}{y^\nu \nu!},$$

also auch von den Gliedern der dritten Reihe, welche deshalb divergirt, woraus sich die Folgerung ergiebt, dass die Function $f(x)$ an keiner Stelle von der Form

$$x_0 = \frac{b\pi}{a^m}$$

(b ungerade) eine Potenzentwickelung zulässt. Da aber die eben erwähnten Stellen in jedem noch so kleinen Intervalle vorkommen, so wird $f(x)$ überhaupt nie durch eine Potenzreihe dargestellt werden können, da sie sich dann auf gewissen Stellen von der Form

$$x_0 = \frac{b\pi}{a^m}$$

analytisch regulär verhalten würde, was unserem letzteren Ergebnisse widerspricht. Hieraus kann man aber nicht schliessen, dass die *Taylor*sche Reihe für $f(x)$ auch für diejenigen x_0, die nicht von der Form $\frac{b\pi}{a^m}$ sind, divergiren müsste, sondern es folgt hieraus nur, dass der Rest der *Taylor*schen Reihenentwickelung nicht unendlich klein wird, ebenso wie dies bei der Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$ an der Stelle $x_0 = 0$ der Fall ist.

Weinberge in Böhmen, Dezember 1886.

Ueber die *Jacobi*schen Covarianten der Systeme von Berührungskegelschnitten einer Curve vierter Ordnung.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

In seiner Arbeit *Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten* (dieses Journal, Bd. 49, S. 265) definirt *Steiner* einige der wichtigsten irrationalen Covarianten der Curve vierter Ordnung, namentlich auch die 63 *Jacobi*schen Covarianten G^3, welche zu den 63 Systemen von Berührungskegelschnitten gehören. Am Schluss seiner Arbeit wirft er die Frage auf, welche Beziehungen diese 63 Systeme und ihre Covarianten zu einander haben. Da mir auf dem durch diese Frage bezeichneten Gebiete noch kein Ergebniss bekannt ist, so habe ich einige darauf bezügliche Resultate, die ich in einer Untersuchung über die Thetafunctionen von drei Variabeln erhalten hatte, zusammengestellt und auf rein algebraischem Wege entwickelt. Von diesen Ergebnissen, die den ersten Anfang einer Theorie der (irrationalen) Invarianten und Covarianten der ternären Form vierten Grades bilden, dürfte in geometrischer Beziehung der in § 10 entwickelte Satz das grösste Interesse haben.

In meiner Arbeit *Ueber die Beziehungen zwischen den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung* (dieses Journal, Bd. 99, S. 275), die ich im Folgenden mit D. citiren werde, habe ich die rationale Darstellung der 28 Doppeltangenten durch gewisse sieben unter ihnen, deren Möglichkeit *Aronhold* (Berliner Monatsberichte 1864) gezeigt hatte, vollständig durchgeführt und habe daher auf die rationale Form der aufgestellten Relationen besonderes Gewicht gelegt. Für die folgenden Untersuchungen ist dieser Gesichtspunkt weniger massgebend, und ich habe daher, indem ich auf die rationale Form der Formeln verzichte, den dort entwickelten Relationen eine einfachere und mehr symmetrische Gestalt gegeben (§§ 1–5).

In den §§ 6 und 7 vervollständige ich die *Hesse*sche Theorie von den 36 Arten, die 28 Doppeltangenten zu den Verbindungslinien von acht Raumpunkten in Beziehung zu setzen, und von dem Uebergang von einer dieser Darstellungen zu den 35 andern. Nach diesen Vorbereitungen wende ich mich dann in § 8 zu der Untersuchung der Relationen, die zwischen den in § 4 definirten Covarianten G^3 bestehen. Als Anwendung der erhaltenen Resultate behandle ich in den §§ 9 und 10 ausführlich die Theorie der Curven dritter Ordnung, die durch die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten gehen. Aus derselben ergeben sich bemerkenswerthe Beziehungen, in welchen die Functionen G^3 zu den Wurzelfunctionen (§ 11) und ihren Differentialen (§ 12) stehen. Daran knüpfe ich noch in den §§ 13 und 14 die Betrachtung einiger Covarianten dritten und vierten Grades, die mit den Functionen G^3 in engem Zusammenhange stehen.

§ 1.

Definition der 28 Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung mit Hülfe der Raumfigur von *Hesse*.

Seien z^0, z', z'', z''' die Coordinaten eines Punktes z in Bezug auf ein Coordinatentetraeder, und seien

$$(1.) \qquad z_\lambda = a_\lambda^0 z^0 + a_\lambda' z' + a_\lambda'' z'' + a_\lambda''' z''' \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots 7)$$

acht lineare Functionen von z. Damit die acht Ebenen $z_\lambda = 0$ die gemeinsamen Berührungsebenen von drei Flächen zweiter Klasse seien, ist nothwendig und hinreichend, dass man acht Constanten g_λ bestimmen kann, die der Gleichung $\Sigma g_\lambda z_\lambda^2 = 0$ identisch genügen. Ich setze voraus, dass nicht vier der acht Ebenen durch einen Punkt gehen, und dass nicht die Schnittlinien einer derselben mit sechs der andern einen Kegelschnitt berühren. Die aus den Coordinaten von irgend vier der acht Ebenen gebildete Determinante (D. S. 297)

$$(2.) \qquad f_{\alpha\beta\gamma\delta} = (a_\alpha, a_\beta, a_\gamma, a_\delta)$$

ist dann von Null verschieden, und keine der acht Constanten g_λ verschwindet. Ich will nun $\sqrt{g_\lambda} z_\lambda$ durch z_λ ersetzen, also annehmen, die acht linearen Functionen z_λ seien mit solchen constanten Factoren gewählt, dass die zwischen ihnen bestehende Beziehung die Form

$$(3.) \qquad \Sigma z_\lambda^2 = 0$$

hat. Dann ist auch, falls u^0, u', u'', u''' die Coordinaten irgend einer Ebene

u bezeichnen, und $g(u)$ eine beliebige quadratische Function von u ist,

$$(4.) \qquad \Sigma g(a_\lambda) = 0.$$

Z. B. ist

$$(5.) \qquad \sum_\lambda f_{\alpha\beta\gamma\lambda} f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} = 0.$$

Ist also $\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ eine eigentliche Vertauschung der acht Indices 0, 1, ... 7, so ist $f_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta} + f_{\alpha\beta\gamma\delta'} f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = 0$ oder $f_{\alpha\beta\gamma\delta} : f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = -f_{\alpha\beta\gamma\delta'} : f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta}$. Durch wiederholte Anwendung dieser Proportion ergiebt sich, dass das Verhältniss $f_{\alpha\beta\gamma\delta} : f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$ für alle eigentlichen Permutationen denselben (und für alle uneigentlichen den entgegengesetzten) Werth hat. Durchläuft ϱ die vier Indices α, β, γ, δ und ϱ' die vier übrigen Indices α', β', γ', δ', so folgt aus den Gleichungen

$$\sum_\varrho a_\varrho^{(\mu)} a_\varrho^{(\nu)} = -\sum_{\varrho'} a_{\varrho'}^{(\mu)} a_{\varrho'}^{(\nu)}$$

nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten $f^2_{\alpha\beta\gamma\delta} = f^2_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$. Da jede der acht linearen Formen z_λ mit einem willkürlichen Vorzeichen behaftet ist, so kann man voraussetzen, dass

$$(6.) \qquad f_{0123} = +f_{4567}$$

ist. Dann ist allgemein

$$(7.) \qquad f_{\varkappa\lambda\mu\nu} = \varepsilon f_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, je nachdem $\alpha\beta\gamma\delta\varkappa\lambda\mu\nu$ eine eigentliche oder uneigentliche Permutation der acht Indices 0, 1, ... 7 ist.

Seien nun $G'(u) = 0$, $G''(u) = 0$ und $G'''(u) = 0$ drei von einander unabhängige Flächen zweiter Klasse, welche die acht Ebenen a_λ berühren, und seien x', x'', x''' drei Parameter, die ich als die Coordinaten eines Punktes in einer willkürlich gelegenen Ebene deuten werde. Setzt man dann

$$(8.) \qquad G(x, u) = x' G'(u) + x'' G''(u) + x''' G'''(u),$$

so ist identisch

$$(9.) \qquad G(x, a_\lambda) = 0.$$

Sei $G(x; u, v)$ die Polare von $G(x, u)$, und sei

$$(10.) \qquad x_{\alpha\beta} = x_{\beta\alpha} = G(x;\ a_\alpha,\ a_\beta) \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots 7),$$

also nach Gleichung (9.)

$$(11.) \qquad x_{\alpha\alpha} = 0.$$

Sind y', y'', y''' die Coordinaten eines beliebigen Punktes y, so ist nach

Gleichung (4.)

$$\sum_{\lambda} G(x;\ a_\alpha, a_\lambda) G(y;\ a_\beta,\ a_\lambda) = 0.$$

Setzt man also

$$y_{\alpha\beta} = G(y;\ a_\alpha, a_\beta),$$

so bestehen zwischen den Coefficienten der linearen Functionen (10.) quadratische Relationen, die sich in die identischen Gleichungen

$$(12.) \qquad \sum_{\lambda} x_{\alpha\lambda} y_{\beta\lambda} = 0$$

zusammenfassen lassen. In denselben sind α und β irgend zwei gleiche oder verschiedene der Indices von 0 bis 7.

Bekanntlich hat *Hesse* nicht nur die Gleichung (10.) gefunden (dieses Journal Bd. 49, S. 298, Formel (46.)), sondern sich auch mit der Bedingung (4.) mehrfach beschäftigt (vgl. dieses Journal Bd. 99, S. 111). Es ist mir aber nicht bekannt, ob er aus diesen beiden Relationen die Gleichungen (12.) abgeleitet hat, mit deren Hülfe es möglich wird, die Raumfigur von *Hesse* vollständig zu eliminiren und die Theorie der Doppeltangenten auf ein System identischer Gleichungen zwischen ihren Coordinaten zu gründen, die nicht complicirter sind wie die zwischen den Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution.

§ 2.

Die Invarianten der Curve vierter Ordnung.

Nachdem ich die Möglichkeit der Bildung von 28 linearen Functionen

$$(1.) \qquad x_{\alpha\beta} = x_{\beta\alpha} = a'_{\alpha\beta} x' + a''_{\alpha\beta} x'' + a'''_{\alpha\beta} x'''$$

dargethan habe, welche den Bedingungen

$$(2.) \qquad \sum_{\lambda} x_{\alpha\lambda} y_{\beta\lambda} = 0$$

genügen, will ich jetzt die bisher gemachten Voraussetzungen fallen lassen und diese Gleichungen zum Ausgangspunkte nehmen. Denselben füge ich ausser einer auf der Reductibilität dieses Gleichungssystems beruhenden Bedingung, deren Aufstellung erst unten in (8.) möglich ist, nur noch die Annahmen hinzu, dass nicht von jenen 28 linearen Functionen eine identisch Null ist oder zwei sich nur um einen constanten Factor unterscheiden, und dass unter ihnen wenigstens drei linear unabhängig sind *) (dass die 28

*) Lässt man die Constanten $a'_{\alpha\beta}$ und $a''_{\alpha\beta}$ ungeändert, ersetzt aber die Constanten $a'''_{\alpha\beta}$ durch Null, so erhält man 28 neue Functionen $x_{\alpha\beta}$, welche auch den Bedingungen (2.) genügen, sich aber sämmtlich durch zwei unter ihnen linear ausdrücken lassen.

Geraden $a_{\alpha\beta}$ nicht sämmtlich durch einen Punkt gehen). Der Bequemlichkeit halber behalte ich die Bezeichnung (11.) § 1 bei. Ist r der *Rang* (dieses Journal Bd. 86, S. 148) des symmetrischen Systems

$$(3.) \qquad x_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots 7),$$

falls x ein unbestimmter Punkt ist, so ist r auch der Rang des Systems $y_{\alpha\beta}$. Unter den acht homogenen linearen Gleichungen

$$\sum_{\lambda} x_{\alpha\lambda} v_\lambda = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots 7)$$

sind daher r unabhängig, und folglich haben sie nicht mehr als $8-r$ unabhängige Lösungen. Den Identitäten (2.) zufolge sind aber $v_\lambda = y_{\beta\lambda}$ acht Lösungen derselben, von denen r unabhängig sind. Folglich ist $r \leqq 8-r$, also $r \leqq 4$. Bedient man sich für die Determinanten vierten Grades des Systems (3.) der Bezeichnung

$$x\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\delta'\\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\end{pmatrix} = |x_{\lambda\lambda'}| \qquad \begin{pmatrix}\lambda' = \alpha', \beta', \gamma', \delta'\\ \lambda = \alpha, \beta, \gamma, \delta\end{pmatrix},$$

so ist

$$(4.) \qquad x\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\\ \alpha\beta\gamma\delta\end{pmatrix} = (x_{\alpha\gamma}x_{\delta\beta} + x_{\alpha\delta}x_{\beta\gamma} - x_{\alpha\beta}x_{\gamma\delta})^2 - 4x_{\alpha\gamma}x_{\alpha\delta}x_{\beta\gamma}x_{\beta\delta},$$

kann also nur dann identisch Null sein, wenn zwei der linearen Functionen $x_{\varkappa\lambda}$, von einem constanten Factor abgesehen, übereinstimmen, oder wenn eine von ihnen identisch verschwindet. Da dies unseren Voraussetzungen widerspricht, so ist der Rang des Systems (3.) gleich vier. In demselben verschwinden also alle Determinanten fünften Grades, und folglich (vgl. dieses Journal Bd. 82, S. 240, Satz I.) ist, da das System symmetrisch ist,

$$(5.) \qquad x\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\\ \alpha\beta\gamma\delta\end{pmatrix} x\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\delta'\\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\end{pmatrix} = \left[x\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\delta'\\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\end{pmatrix}\right]^2.$$

Mithin sind nicht nur, wie oben gezeigt, die Hauptdeterminanten, sondern auch die Nebendeterminanten vierten Grades in dem System (3.) sämmtlich von Null verschieden.

Sind ξ, η, ζ, τ vier beliebige Indices und ebenso ξ', η', ζ', τ', sind ferner $\alpha\beta\gamma\delta\varkappa\lambda\mu\nu$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varkappa'\lambda'\mu'\nu'$ zwei eigentliche Permutationen der acht Indices 0, 1, ... 7, so folgt (vgl. dieses Journal Bd. 82, S. 237) aus den Gleichungen

$$\sum_{\sigma} x_{\varrho\sigma} y_{\varrho'\sigma} = 0 \qquad \begin{pmatrix}\varrho = \xi, \eta, \zeta, \tau\\ \varrho' = \xi', \eta', \zeta', \tau'\end{pmatrix}$$

die Relation

$$(6.) \qquad x\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\\ \xi\eta\zeta\tau\end{pmatrix} y\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\delta'\\ \xi'\eta'\zeta'\tau'\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}\varkappa'\lambda'\mu'\nu'\\ \xi\ \eta\ \zeta\ \tau\end{pmatrix} y\begin{pmatrix}\varkappa\ \lambda\ \mu\ \nu\\ \xi'\eta'\zeta'\tau'\end{pmatrix}.$$

Speciell ist

$$\left[x\binom{\alpha\beta\gamma\delta}{\xi\eta\zeta\tau}\right]^2 = \left[x\binom{\varkappa\lambda\mu\nu}{\xi\eta\zeta\tau}\right]^2$$

und folglich

$$(7.) \qquad x\binom{\alpha\beta\gamma\delta}{\xi\eta\zeta\tau} = \varepsilon x\binom{\varkappa\lambda\mu\nu}{\xi\eta\zeta\tau},$$

wo $\varepsilon^2 = 1$ ist. Das so definirte Vorzeichen ε ist der Gleichung (6.) zufolge unabhängig von ξ, η, ζ, τ und unabhängig davon, welche gerade Permutation von 0, 1, ... 7 für $\alpha\beta\gamma\delta\varkappa\lambda\mu\nu$ gewählt wird. Zu den Relationen (2.) füge ich nun noch die weitere Einschränkung hinzu, dass

$$(8.) \qquad \varepsilon = +1$$

sein soll.

Nach Formel (6.) sind die Verhältnisse der Determinanten vierten Grades des Systems (3.) von x unabhängig. Nach Gleichung (5.) ist daher

$$(9.) \qquad x\binom{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta} = f_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} F(x),$$

wo $F(x)$ eine Function vierten Grades von x ist. Die durch diese Gleichung definirte Constante $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist von Null verschieden, wenn die Indices α, β, γ, δ verschieden sind, wechselt das Zeichen, wenn man zwei der Indices unter einander vertauscht, und verschwindet, wenn zwei der Indices einander gleich sind. Diese Constanten sind nur bis auf einen gemeinsamen Factor genau definirt, den ich unbestimmt lasse. Ist derselbe fixirt, so ist $F(x)$ durch die Gleichungen (9.) vollständig definirt. Speciell ist

$$(10.) \qquad f^2_{\alpha\beta\gamma\delta} F(x) = N(\sqrt{x_{\alpha\beta} x_{\gamma\delta}} + \sqrt{x_{\alpha\gamma} x_{\delta\beta}} + \sqrt{x_{\alpha\delta} x_{\beta\gamma}}),$$

und folglich sind die Geraden $a_{\alpha\beta}$ die 28 Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $F = 0$. Nach Gleichung (7.) ist ferner

$$(11.) \qquad f_{\varkappa\lambda\mu\nu} = \varepsilon f_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, je nachdem $\alpha\beta\gamma\delta\varkappa\lambda\mu\nu$ eine eigentliche oder uneigentliche Vertauschung der Indices 0, 1, ... 7 ist.

Ist λ ein veränderlicher Index und sind α, β, γ, α', β', γ' feste Indices, so ist die Determinante

$$x\binom{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \lambda} = f_{\alpha\beta\gamma\lambda} f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} F(x)$$

eine lineare Verbindung der Producte $x_{\alpha\lambda} x_{\alpha'\lambda}$, $x_{\alpha\lambda} x_{\beta'\lambda}$ u. s. w. Aus der Gleichung

$$(12.) \qquad \sum_{\lambda} x_{\alpha\lambda} x_{\beta\lambda} = 0$$

folgt daher

$$(13.) \qquad \sum_{\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\lambda} f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} = 0.$$

Sind $\varkappa$, λ, μ, ν, ϱ die fünf von α', β', γ' verschiedenen Indices, so kann man diese Gleichung mit Hülfe der Formel (11.) auf die Gestalt bringen

$$(14.) \qquad f_{\alpha\beta\gamma\varkappa} f_{\lambda\mu\nu\varrho} + f_{\alpha\beta\gamma\lambda} f_{\mu\nu\varrho\varkappa} + f_{\alpha\beta\gamma\mu} f_{\nu\varrho\varkappa\lambda} + f_{\alpha\beta\gamma\nu} f_{\varrho\varkappa\lambda\mu} + f_{\alpha\beta\gamma\varrho} f_{\varkappa\lambda\mu\nu} = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen aber, dass man acht lineare Functionen (1.) § 1 so bestimmen kann, dass $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ gleich der Determinante (2.) § 1 wird. Nach einem bekannten Determinantensatze kann man z. B.

$$f^{\frac{3}{4}}_{0123} a^{(\alpha)}_{\lambda} = f_{\lambda\beta\gamma\delta} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots 7)$$

setzen, wo α, β, γ, δ irgend eine eigentliche Vertauschung von 0, 1, 2, 3 ist, also speciell

$$a^{(\alpha)}_{\alpha} = f^{\frac{1}{4}}_{0123}, \quad a^{(\alpha)}_{\beta} = 0.$$

Diese Darstellung zeigt, dass man die 35 Verhältnisse $f_{\varkappa\lambda\mu\nu} : f_{0123}$ durch die 16 Verhältnisse $f_{\lambda\beta\gamma\delta} : f_{0123}$ ($\lambda = 4, 5, 6, 7$) rational ausdrücken kann. Nach Gleichung (13.) bilden aber diese (mit i multiplicirt) die Coefficienten einer orthogonalen Substitution und lassen sich daher mit Hülfe der *Cayley*schen Formeln durch sechs Parameter rational ausdrücken. Anstatt aber (vgl. *Riemann*, Zur Theorie der *Abel*schen Functionen für den Fall $p = 3$; Ges. Werke S. 472) solche sechs unabhängigen Constanten einzuführen, ist es vortheilhafter, die Verhältnisse der sämmtlichen 36 (oder vielmehr 72) Grössen $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ als (irrationale) Invarianten der Form $F(x)$ beizubehalten *).

Nach Formel (13.) ist

$$(15.) \qquad \sum_{\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\lambda} z_{\lambda} = 0,$$

wenn $z_{\alpha'} = z_{\beta'} = z_{\gamma'} = 0$ ist, und α', β', γ' irgend drei der acht Indices sind, und folglich gilt diese Gleichung identisch (vgl. D. § 3, (17.)). Sind daher t^0, t', t'', t''' die Coordinaten eines beliebigen Punktes t, und geht z_λ in t_λ über, falls man z durch t ersetzt, so ergiebt sich aus dieser Relation in derselben Weise die Gleichung $\Sigma z_\lambda t_\lambda = 0$, und folglich ist auch, wenn $g(u)$ eine beliebige quadratische Function ist,

$$(16.) \qquad \Sigma g(a_\lambda) = 0.$$

---

*) Ist $\alpha\beta\gamma\varkappa\lambda\mu\nu$ eine eigentliche Vertauschung der sieben Indices 1, 2, ... 7, und bezeichnet man $f_{\varkappa\lambda\mu\nu} = f_{0\alpha\beta\gamma}$ mit $f_{\alpha\beta\gamma}$, so erhält man die Grössen, deren Verhältnisse Herr *Schottky* (Abriss einer Theorie der *Abel*schen Functionen von drei Variabeln § 8, S. 30) als Invarianten von $F(x)$ benutzt hat.

Mit Hülfe dieser Beziehung kann man nun folgenden Satz beweisen: Setzt man

$$(17.) \qquad f = f_{0246}f_{0257}f_{0347}f_{0356} - f_{0357}f_{0346}f_{0256}f_{0247},$$

so ist auch allgemein

$$(18.) \qquad \varepsilon f = f_{\varkappa\alpha\beta\gamma}f_{\varkappa\alpha\beta'\gamma'}f_{\varkappa\alpha'\beta\gamma'}f_{\varkappa\alpha'\beta'\gamma} - f_{\varkappa\alpha'\beta'\gamma'}f_{\varkappa\alpha'\beta\gamma}f_{\varkappa\alpha\beta'\gamma}f_{\varkappa\alpha\beta\gamma'},$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, je nachdem $\varkappa\varkappa'\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ eine eigentliche oder uneigentliche Permutation von 0, 1, ... 7 ist. Um dies einzusehen, genügt es nachzuweisen, dass der Ausdruck (18.) das Zeichen wechselt, falls man den Index $\varkappa'$ mit irgend einem der sieben übrigen Indices vertauscht. Wendet man auf jede in dem Ausdrucke (17.) vorkommende Grösse $f_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ die Formel (11.) an, so ergiebt sich

$$f = f_{1357}f_{1346}f_{1256}f_{1247} - f_{1246}f_{1257}f_{1347}f_{1356}.$$

Demnach wechselt der Ausdruck (17.) das Zeichen, wenn man 0 mit 1 vertauscht, und ebenso der Ausdruck (18.), wenn man $\varkappa$ mit $\varkappa'$ vertauscht. Ersetzt man ferner in diesem Ausdrucke a_α durch u, so erhält man die quadratische Function

$$g(u) = (a_\varkappa, u, a_\beta, a_\gamma)(a_\varkappa, u, a_{\beta'}, a_{\gamma'})f_{\varkappa\alpha'\beta\gamma'}f_{\varkappa\alpha'\beta'\gamma} - f_{\varkappa\alpha'\beta'\gamma'}f_{\varkappa\alpha'\beta\gamma}(a_\varkappa, u, a_{\beta'}, a_\gamma)(a_\varkappa, u, a_\beta, a_{\gamma'}),$$

welche für $u = a_\varkappa$, a_β, a_γ, $a_{\beta'}$, $a_{\gamma'}$ und $a_{\alpha'}$ verschwindet. Wendet man auf diese die Formel (16.) an, so ergiebt sich die Gleichung $g(a_\alpha)+g(a_{\varkappa'}) = 0$, welche zeigt, dass der Ausdruck (18.) das Zeichen wechselt, wenn man $\varkappa'$ mit α vertauscht, u. s. w.

§ 3.

Die linearen Gleichungen zwischen den Functionen $x_{\alpha\beta}$.

Ist λ ein veränderlicher Index, so ist die Determinante

$$x\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\delta'\\ \beta\ \gamma\ \delta\ \lambda\end{pmatrix} = f_{\beta\gamma\delta\lambda}f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}F$$

eine lineare Verbindung von $x_{\alpha'\lambda}$, $x_{\beta'\lambda}$, $x_{\gamma'\lambda}$, $x_{\delta'\lambda}$, und mithin ist den Formeln (12.) § 2 zufolge

$$(1.) \qquad \sum_\lambda f_{\beta\gamma\delta\lambda}x_{\alpha\lambda} = 0.$$

Wie oben folgt daraus, dass auch identisch

$$(2.) \qquad \sum_\lambda x_{\alpha\lambda}z_\lambda = 0$$

ist. Aus diesen Gleichungen habe ich D. § 7 bewiesen, dass man eine quadratische Function von u

$$(3.) \qquad G(x, u) = \sum_{\mu,\nu} x^{\mu,\nu} u^{(\mu)} u^{(\nu)},$$

deren Coefficienten $x^{\mu,\nu}$ lineare Functionen von x sind, so bestimmen kann, dass die Gleichungen (9.) und (10.) § 1 bestehen.

Multiplicirt man die Gleichung

$$-x_{\varkappa 6} z_6 - x_{\varkappa 7} z_7 = \sum_{\lambda}^{5}{}_0 x_{\varkappa\lambda} z_\lambda$$

mit $z_\varkappa$ und summirt nach $\varkappa$ von 0 bis 5, so erhält man

$$(4.) \qquad 2x_{67} z_6 z_7 = \sum_{\varkappa,\lambda}^{5}{}_0 x_{\varkappa\lambda} z_\varkappa z_\lambda,$$

und daraus, indem man $z_3 = z_4 = z_5 = 0$ setzt,

$$(5.) \qquad f_{3456} f_{3457} x_{67} = f_{3451} f_{3452} x_{12} + f_{3452} f_{3450} x_{20} + f_{3450} f_{3451} x_{01}$$

oder

$$(6.) \qquad f_{0126} f_{0127} x_{67} = f_{6701} f_{6702} x_{12} + f_{6712} f_{6710} x_{20} + f_{6720} f_{6721} x_{01}.$$

Hierin vertausche man 6 mit 5 und eliminire dann x_{12}. Mit Hülfe der in Gleichung (14.) § 2 enthaltenen Formel

$$(7.) \qquad f_{\varkappa\lambda\alpha\beta} f_{\varkappa\lambda\gamma\delta} + f_{\varkappa\lambda\alpha\gamma} f_{\varkappa\lambda\delta\beta} + f_{\varkappa\lambda\alpha\delta} f_{\varkappa\lambda\beta\gamma} = 0$$

findet man so

$$f_{0671} f_{0672} f_{0125} x_{57} - f_{0571} f_{0572} f_{0126} x_{67} = -f_{0257} f_{0267} f_{1567} x_{01} + f_{0157} f_{0167} f_{2567} x_{02}.$$

Vertauscht man 2 mit 3 und eliminirt dann x_{57}, so erhält man mit Berücksichtigung der Formeln (18.) § 2 und (7.)

$$(8.) \qquad -f x_{67} = f_{0234} f_{0235} f_{0267} f_{0367} x_{01} + f_{0314} f_{0315} f_{0367} f_{0167} x_{02} + f_{0124} f_{0125} f_{0167} f_{0267} x_{03}.$$

Aus dieser Gleichung (und den analogen) folgt, dass f von Null verschieden ist. Denn sonst würden die sieben Geraden $a_{0\lambda}$ alle durch einen Punkt P_0 gehen, die sieben Geraden $a_{1\lambda}$ alle durch einen Punkt P_1 u. s. w., die Gerade $a_{\alpha\beta}$ würde also durch die Punkte P_α und P_β gehen. Nach der Voraussetzung können die acht Punkte P_0, P_1, ... P_7 nicht alle in einen zusammenfallen. Fielen sie nur zum Theil zusammen, so wären die 28 Geraden $a_{\alpha\beta}$ nicht alle von einander verschieden. Wären sie acht verschiedene Punkte, so würde nach Gleichung (10.) § 2 die Curve $F = 0$ durch jeden von ihnen gehen und in jedem sieben verschiedene Doppeltangenten haben.

Bedient man sich der D. § 5 eingeführten Bezeichnung, so folgt aus dieser Gleichung

$$-f[67, 01, 02] = f_{0124} f_{0125} f_{0167} f_{0267} [01, 02, 03],$$

und aus der Gleichung (6.)

$$-f_{0126}f_{0127}[67, 01, 02] = f_{0167}f_{0267}[12, 20, 01].$$

Mithin ist

$$[12, 20, 01]ff_{0123} = [01, 02, 03](\prod_{\lambda}{}^{7}_{3} f_{012\lambda}).$$

Durch Vertauschung von 0 und 1 oder von 3 und 4 ergiebt sich daraus

$$[10, 12, 13] = -[01, 02, 03), \quad \frac{[01, 02, 03]}{f_{0123}} = \frac{[01, 02, 04]}{f_{0124}}.$$

Setzt man also

$$[01, 02, 03] = mf_{0123},$$

so bleibt m bei jeder Vertauschung der Indices ungeändert. Aus den obigen Formeln erhält man folglich die Relationen

$$(9.) \quad [\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta] = mf_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

$$(10.) \quad f[\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta] = m\prod_{\lambda}(f_{\alpha\beta\gamma\lambda}),$$

$$(11.) \quad f[\alpha\beta, \varkappa\lambda, \varkappa\mu] = -mf_{\varkappa\lambda\alpha\beta}f_{\varkappa\mu\alpha\beta}f_{\varkappa\lambda\mu\varrho}f_{\varkappa\lambda\mu\sigma}f_{\varkappa\lambda\mu\tau}.$$

In der Gleichung (10.) durchläuft λ die fünf von α, β, γ verschiedenen Indices, in der Gleichung (11.) sind ϱ, σ, τ die drei von α, β, $\varkappa$, λ, μ verschiedenen Indices. Da die 28 Geraden $a_{\alpha\beta}$ nicht sämmtlich durch einen Punkt gehen, so ist m von Null verschieden. Mit Hülfe dieser Formeln kann man in allen zwischen den Functionen $x_{\alpha\beta}$ bestehenden Identitäten die Coefficienten bestimmen.

§ 4.

Die quadratischen Gleichungen zwischen den Functionen $x_{\alpha\beta}$. Die 63 Covarianten G_a.

Nach Gleichung (8.) § 3 ist

$$\frac{fx_{12}}{f_{0123}f_{0124}f_{0125}} = \sum_{\lambda}\frac{f_{126\lambda}f_{127\lambda}x_{0\lambda}}{f_{012\lambda}},$$

wo λ alle Indices durchläuft, für welche der Nenner $f_{012\lambda}$ nicht verschwindet. Folglich ist

$$f\left(\frac{x_{02}x_{12}}{f_{0123}f_{0124}f_{0125}} + \frac{x_{03}x_{13}}{f_{0132}f_{0134}f_{0135}} + \frac{x_{04}x_{14}}{f_{0142}f_{0143}f_{0145}} + \frac{x_{05}x_{15}}{f_{0152}f_{0153}f_{0154}}\right)$$

$$= \sum_{\lambda}\frac{f_{126\lambda}f_{127\lambda}x_{02}x_{0\lambda}}{f_{012\lambda}} + \sum_{\lambda}\frac{f_{136\lambda}f_{137\lambda}x_{03}x_{0\lambda}}{f_{013\lambda}} + \cdots.$$

Auf der rechten Seite hat z. B. $x_{02}x_{03}$ den Coefficienten

$$\frac{f_{1263}f_{1273}}{f_{0123}} + \frac{f_{1362}f_{1372}}{f_{0132}} = 0.$$

Mithin verschwindet die betrachtete Summe, und ebenso ist allgemein

$$(1.)\quad \begin{cases} f_{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu\alpha\gamma}f_{\mu\nu\alpha\delta}x_{\varkappa\alpha}x_{\lambda\alpha}+f_{\mu\nu\beta\alpha}f_{\mu\nu\beta\gamma}f_{\mu\nu\beta\delta}x_{\varkappa\beta}x_{\lambda\beta} \\ +f_{\mu\nu\gamma\alpha}f_{\mu\nu\gamma\beta}f_{\mu\nu\gamma\delta}x_{\varkappa\gamma}x_{\lambda\gamma}+f_{\mu\nu\delta\alpha}f_{\mu\nu\delta\beta}f_{\mu\nu\delta\gamma}x_{\varkappa\delta}x_{\lambda\delta} = 0. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(2.)\quad f_{\alpha\beta\gamma} = \prod_{\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\lambda},$$

so ist, wie ich beiläufig bemerke, allgemeiner

$$(3.)\quad \sum_{\mu} \frac{x_{\varkappa\mu}x_{\lambda\mu}y_{\varkappa\mu}y_{\lambda\mu}}{f_{\varkappa\lambda\mu}} = 0,$$

wo x und y zwei willkürliche Punkte sind.

Demnach lassen sich die sechs quadratischen Functionen

$$(4.)\quad x_{02}x_{12},\quad x_{03}x_{13},\quad \ldots\quad x_{07}x_{17}$$

alle durch 3 unter ihnen linear ausdrücken, oder die sechs Linienpaare $x_{0\lambda}x_{1\lambda}=0$ gehören alle demselben Kegelschnittnetze an. Die *Jacobi*sche Covariante eines solchen Netzes definire ich durch die Gleichung

$$(5.)\quad 2mf_{\varkappa\lambda\beta\gamma}f_{\varkappa\lambda\gamma\alpha}f_{\varkappa\lambda\alpha\beta}G_{\varkappa\lambda}(x) = \frac{\partial(x_{\varkappa\alpha}x_{\lambda\alpha}, x_{\varkappa\beta}x_{\lambda\beta}, x_{\varkappa\gamma}x_{\lambda\gamma})}{\partial(x', x'', x''')}.$$

Der Relation (1.) zufolge bleibt diese Function $G_{\varkappa\lambda}$ ungeändert, wenn man α, β, γ durch irgend drei andere von $\varkappa, \lambda$ verschiedene Indices ersetzt. Ferner ergiebt sich aus dieser Definition, dass

$$(6.)\quad G_{\lambda\varkappa} = -G_{\varkappa\lambda}$$

ist. Daher setze ich $G_{\lambda\lambda}=0$. Durch Ausrechnung der Functionaldeterminante erhält man

$$2mf_{\varkappa\lambda\beta\gamma}f_{\varkappa\lambda\gamma\alpha}f_{\varkappa\lambda\alpha\beta}G_{\varkappa\lambda} = |a^{(\nu)}_{\varkappa\mu}x_{\lambda\mu}+a^{(\nu)}_{\lambda\mu}x_{\varkappa\mu}| \qquad \binom{\mu=\alpha,\ \beta,\ \gamma}{\nu=1,\ 2,\ 3}.$$

Nun ist aber

$$\sum_{\nu}^{3}{}_{1}(a^{(\nu)}_{\varkappa\mu}x_{\lambda\mu}-a^{(\nu)}_{\lambda\mu}x_{\varkappa\mu})x^{(\nu)} = x_{\varkappa\mu}x_{\lambda\mu}-x_{\lambda\mu}x_{\varkappa\mu} = 0 \qquad (\mu=\alpha,\ \beta,\ \gamma).$$

Eliminirt man x', x'', x''' aus diesen drei Gleichungen, so erhält man

$$|a^{(\nu)}_{\varkappa\mu}x_{\lambda\mu}-a^{(\nu)}_{\lambda\mu}x_{\varkappa\mu}| = 0.$$

Addirt man diese Gleichung zu der vorhergehenden, so findet man

$$\begin{aligned} mf_{\varkappa\lambda\beta\gamma}f_{\varkappa\lambda\gamma\alpha}f_{\varkappa\lambda\alpha\beta}G_{\varkappa\lambda} = {} & [\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma]x_{\varkappa\alpha}x_{\varkappa\beta}x_{\varkappa\gamma}+[\lambda\alpha, \varkappa\beta, \varkappa\gamma]x_{\varkappa\alpha}x_{\lambda\beta}x_{\lambda\gamma} \\ & +[\varkappa\alpha, \lambda\beta, \varkappa\gamma]x_{\lambda\alpha}x_{\varkappa\beta}x_{\lambda\gamma}+[\varkappa\alpha, \varkappa\beta, \lambda\gamma]x_{\lambda\alpha}x_{\lambda\beta}x_{\varkappa\gamma} \end{aligned}$$

und folglich

$$(7.)\quad \begin{cases} ff_{\varkappa\lambda\beta\gamma}f_{\varkappa\lambda\gamma\alpha}f_{\varkappa\lambda\alpha\beta}G_{\varkappa\lambda}(x) = ff_{\lambda\alpha\beta\gamma}x_{\varkappa\alpha}x_{\varkappa\beta}x_{\varkappa\gamma} \\ +f_{\varkappa\lambda\gamma\alpha}f_{\varkappa\lambda\alpha\beta}f_{\varkappa\beta\gamma\mu}f_{\varkappa\beta\gamma\nu}f_{\varkappa\beta\gamma\varrho}x_{\varkappa\alpha}x_{\lambda\beta}x_{\lambda\gamma} \\ +f_{\varkappa\lambda\alpha\beta}f_{\varkappa\lambda\beta\gamma}f_{\varkappa\gamma\alpha\mu}f_{\varkappa\gamma\alpha\nu}f_{\varkappa\gamma\alpha\varrho}x_{\lambda\alpha}x_{\varkappa\beta}x_{\lambda\gamma} \\ +f_{\varkappa\lambda\beta\gamma}f_{\varkappa\lambda\gamma\alpha}f_{\varkappa\alpha\beta\mu}f_{\varkappa\alpha\beta\nu}f_{\varkappa\alpha\beta\varrho}x_{\lambda\alpha}x_{\lambda\beta}x_{\varkappa\gamma}. \end{cases}$$

Sind α, β, γ die Zahlen 1, 2, 3, so ist nach Formel (6.) § 3

$$\frac{f_{0\alpha\beta4}f_{0\alpha\beta5}x_{45}}{f_{450\alpha}f_{450\beta}f_{45\alpha\beta}} = \frac{x_{0\alpha}}{f_{0\alpha45}} - \frac{x_{0\beta}}{f_{0\beta45}} + \frac{x_{\alpha\beta}}{f_{\alpha\beta45}}.$$

Multiplicirt man mit $\frac{x_{0\gamma}}{f_{0\gamma45}}$ und addirt die drei so erhaltenen Gleichungen, so findet man

$$\frac{x_{01}x_{23}}{f_{0145}f_{2345}} + \frac{x_{02}x_{31}}{f_{0245}f_{3145}} + \frac{x_{03}x_{12}}{f_{0345}f_{1245}}$$
$$= \frac{x_{45}}{f_{4501}f_{4502}f_{4503}}\left[\frac{f_{0234}f_{0235}x_{01}}{f_{2345}} + \frac{f_{0314}f_{0315}x_{02}}{f_{3145}} + \frac{f_{0124}f_{0125}x_{03}}{f_{1245}}\right].$$

Nach Formel (8.) § 3 ist die letztere Summe gleich $\frac{-fx_{67}}{f_{4523}f_{4531}f_{4512}}$, und folglich ist

$$(8.)\quad -fx_{45}x_{67} = f_{0245}f_{0267}f_{0345}f_{0367}x_{01}x_{23} + f_{0345}f_{0367}f_{0145}f_{0167}x_{02}x_{31} + f_{0145}f_{0167}f_{0245}f_{0267}x_{03}x_{12}.$$

Allgemeiner gilt die Gleichung

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{x_{01}x_{23}y_{01}y_{23}}{\Pi f_{014\lambda}f_{234\lambda}} + \dfrac{x_{02}x_{31}y_{02}y_{31}}{\Pi f_{024\lambda}f_{314\lambda}} + \dfrac{x_{03}x_{12}y_{03}y_{12}}{\Pi f_{034\lambda}f_{124\lambda}} \\ = \dfrac{x_{45}x_{67}y_{45}y_{67}}{\Pi f_{450\varkappa}f_{670\varkappa}} + \dfrac{x_{46}x_{75}y_{46}y_{75}}{\Pi f_{460\varkappa}f_{750\varkappa}} + \dfrac{x_{47}x_{56}y_{47}y_{56}}{\Pi f_{470\varkappa}f_{560\varkappa}}, \end{cases}$$

wo sich $\varkappa$ von 1 bis 3 und λ von 5 bis 7 bewegt. (In den Nennern sind die Indices 0 und 4 nur scheinbar bevorzugt.)

Demnach gehören die sechs Linienpaare, welche man erhält, indem man je eine der sechs quadratischen Functionen

$$(10.)\quad x_{01}x_{23},\quad x_{02}x_{31},\quad x_{03}x_{12},\quad x_{45}x_{67},\quad x_{46}x_{75}\quad x_{47}x_{56}$$

gleich Null setzt, alle demselben Kegelschnittnetze an. Wie leicht zu zeigen, berührt ein Kegelschnitt dieses Netzes

$$px_{01}x_{23} + qx_{02}x_{31} + rx_{03}x_{12} = 0$$

die Curve $F = 0$ in vier Punkten, falls

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$$

ist, und jeder andere Kegelschnitt desselben geht durch die acht Berührungspunkte von zwei Berührungskegelschnitten hindurch.

Die *Jacobi*sche Covariante eines solchen Netzes definire ich durch die Gleichung

$$(11.) \qquad 2mf^2_{\alpha\beta\gamma\delta}G_{\alpha\beta\gamma\delta}(x) = \frac{\partial(x_{\alpha\beta}x_{\gamma\delta}, x_{\alpha\gamma}x_{\delta\beta}, x_{\alpha\delta}x_{\beta\gamma})}{\partial(x', x'', x''')},$$

so dass $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$ das Zeichen wechselt, wenn man zwei Indices mit einander vertauscht, und dass sich G_{0123} von G_{4567} nur durch einen constanten Factor unterscheiden kann (§ 8, (2.)). Sind die Indices nicht alle unter einander verschieden, so bedeutet das Zeichen $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$ die Null. Durch Ausrechnung der Functionaldeterminante findet man in derselben Weise wie oben

$$\begin{aligned} mf^2_{\alpha\beta\gamma\delta}G_{\alpha\beta\gamma\delta} &= [\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta]x_{\gamma\delta}x_{\delta\beta}x_{\beta\gamma}+[\alpha\beta, \delta\beta, \beta\gamma]x_{\gamma\delta}x_{\alpha\gamma}x_{\alpha\delta} \\ &\quad +[\gamma\delta, \alpha\gamma, \beta\gamma]x_{\alpha\beta}x_{\delta\beta}x_{\alpha\delta}+[\gamma\delta, \delta\beta, \alpha\delta]x_{\alpha\beta}x_{\alpha\gamma}x_{\beta\gamma} \\ &= [\gamma\delta, \delta\beta, \beta\gamma]x_{\alpha\beta}x_{\alpha\gamma}x_{\alpha\delta}+[\gamma\delta, \alpha\gamma, \alpha\delta]x_{\alpha\beta}x_{\delta\beta}x_{\beta\gamma} \\ &\quad +[\alpha\beta, \delta\beta, \alpha\delta]x_{\gamma\delta}x_{\alpha\gamma}x_{\beta\gamma}+[\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma]x_{\gamma\delta}x_{\delta\beta}x_{\alpha\delta}, \end{aligned}$$

und folglich (vgl. *Aronhold*, l. c. S. 517)

$$(12.) \qquad f_{\alpha\beta\gamma\delta}G_{\alpha\beta\gamma\delta} = x_{\beta\gamma}x_{\gamma\delta}x_{\delta\beta}+x_{\gamma\delta}x_{\delta\alpha}x_{\alpha\gamma}+x_{\delta\alpha}x_{\alpha\beta}x_{\beta\delta}+x_{\alpha\beta}x_{\beta\gamma}x_{\gamma\alpha}$$

und, wenn λ die vier von α, β, γ, δ verschiedenen Indices durchläuft,

$$(13.) \quad \begin{cases} -ff_{\alpha\beta\gamma\delta}G_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\Pi f_{\beta\gamma\delta\lambda})x_{\alpha\beta}x_{\alpha\gamma}x_{\alpha\delta}+(\Pi f_{\alpha\gamma\delta\lambda})x_{\beta\alpha}x_{\beta\gamma}x_{\beta\delta} \\ \qquad\qquad +(\Pi f_{\alpha\beta\delta\lambda})x_{\gamma\alpha}x_{\gamma\beta}x_{\gamma\delta}+(\Pi f_{\alpha\beta\gamma\lambda})x_{\delta\alpha}x_{\delta\beta}x_{\delta\gamma}. \end{cases}$$

Die sechs Paare von Doppeltangenten (4.) bilden eine *Steiner*sche Gruppe, von der ich sagen will, sie gehöre zur *Charakteristik* [01]. Ebenso bilden die sechs Paare von Doppeltangenten (10.) eine *Steiner*sche Gruppe, die zur Charakteristik [0123] gehört, so dass die beiden Charakteristiken [0123] und [4567] als gleichbedeutend zu betrachten sind. Ich habe D. § 6 die drei Doppeltangenten $a_{\alpha\beta}$, $a_{\beta\gamma}$, $a_{\gamma\delta}$, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen, *syzygetisch* genannt, und ebenso die drei Doppeltangenten $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\mu\nu}$, $a_{\varrho\sigma}$. Dagegen habe ich die drei Doppeltangenten $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\gamma}$, $a_{\alpha\delta}$, deren Berührungspunkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen, *azygetisch* genannt, ebenso $a_{\beta\gamma}$, $a_{\gamma\alpha}$, $a_{\alpha\beta}$ und $a_{\alpha\beta}$, $a_{\varkappa\lambda}$, $a_{\varkappa\mu}$. Jetzt will ich zwei verschiedene *Steiner*sche Gruppen *syzygetisch* oder *azygetisch* nennen, je nachdem ihre Charakteristiken eine gerade oder ungerade Anzahl von Indices gemeinsam haben. Azygetisch sind also $[\alpha\beta]$ und $[\alpha\gamma]$, $[\alpha\beta]$ und $[\alpha\varkappa\lambda\mu] = [\beta\gamma\delta\nu]$, $[\alpha\beta\gamma\varkappa]$ und $[\alpha\beta\gamma\lambda]$. Syzygetisch sind aber $[\alpha\beta]$ und

$[\gamma\delta]$, $[\alpha\beta]$ und $[\alpha\beta\gamma\delta]$, $[\alpha\beta\gamma\delta]$ und $[\alpha\beta\varkappa\lambda]$. Unter den 63.31 Paaren, die sich aus den 63 *Steiner*schen Gruppen bilden lassen, giebt es 63.15 Paare syzygetischer Gruppen und 63.16 Paare azygetischer Gruppen (*Steiner* l. c. V.) Eine *Steiner*sche Gruppe enthält zwölf Doppeltangenten, welche in sechs Paare conjugirter Geraden zerfallen. Zwei syzygetische Gruppen haben vier Gerade gemeinsam, z. B. die durch [0123] und [0145] charakterisirten Gruppen die vier Doppeltangenten

$$(14.) \qquad a_{01},\quad a_{23},\quad a_{45},\quad a_{67},$$

von denen je drei syzygetisch sind, und von denen je zwei in einer der beiden Gruppen oder in der Gruppe [2345] conjugirt sind. Zwei azygetische Gruppen aber haben sechs Gerade gemeinsam, z. B. die durch [0126] und [0127] charakterisirten Gruppen die Doppeltangenten

$$(15.) \qquad a_{12},\quad a_{20},\quad a_{01},\quad a_{45},\quad a_{53},\quad a_{34},$$

von denen je drei azygetisch sind, und von denen nicht zwei in einer der beiden Gruppen conjugirt sind, und deren keine der Gruppe [67] angehört.

§ 5.

Die Wurzelfunctionen.

Liegt der Punkt x auf der Curve $F(x)=0$, so kann man, wie ich D. § 8 gezeigt habe, die Vorzeichen der Wurzeln

$$(1.) \qquad \sqrt{x_{\alpha\beta}} \qquad (\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots\ 7)$$

so wählen, dass ihr System alternirend und vom Range 2 wird. Im Folgenden ist unter $\sqrt{abc\ldots}$ immer das Product $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\ldots$ zu verstehen. Dann bestehen die Gleichungen

$$(2.) \qquad \sqrt{x_{\beta\alpha}} = -\sqrt{x_{\alpha\beta}},\quad \sqrt{x_{\alpha\beta}x_{\gamma\delta}}+\sqrt{x_{\alpha\gamma}x_{\delta\beta}}+\sqrt{x_{\alpha\delta}x_{\beta\gamma}} = 0,$$

aus denen ich l. c. die weiteren Relationen

$$(3.) \qquad f_{\varkappa\lambda\beta\gamma}\sqrt{x_{\varkappa\alpha}x_{\lambda\alpha}}+f_{\varkappa\lambda\gamma\alpha}\sqrt{x_{\varkappa\beta}x_{\lambda\beta}}+f_{\varkappa\lambda\alpha\beta}\sqrt{x_{\varkappa\gamma}x_{\lambda\gamma}} = 0$$

abgeleitet habe.

Aus den Formeln (8.) § 4 und (13.) § 2 folgt die Gleichung

$$\begin{aligned} f x_{45}x_{67} = {} & f_{0245}f_{0267}(f_{0245}f_{0267}+f_{0145}f_{0167})x_{01}x_{23} \\ & +f_{0145}f_{0167}(f_{0145}f_{0167}+f_{0245}f_{0267})x_{02}x_{31} \\ & -f_{0145}f_{0167}f_{0245}f_{0267}x_{03}x_{12}. \end{aligned}$$

Nach Formel (2.) ist aber

$$x_{01}x_{23}+x_{02}x_{31}-x_{03}x_{12} = +2\sqrt{x_{01}x_{23}x_{02}x_{13}}$$

und mithin

$$(4.) \quad fx_{45}x_{67} = (f_{0145}f_{0167}\sqrt{x_{02}x_{13}}+f_{0245}f_{0267}\sqrt{x_{01}x_{23}})^2.$$

Demnach lässt sich $\sqrt{f}$ durch die oben definirten Wurzeln rational ausdrücken. Setzt man

$$(5.) \quad \sqrt{f}\sqrt{x_{45}x_{67}} = f_{0145}f_{0167}\sqrt{x_{02}x_{13}}+f_{0245}f_{0267}\sqrt{x_{01}x_{23}},$$

so behaupte ich, ist auch allgemein

$$(6.) \quad \sqrt{f}\sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}} = f_{\alpha\beta\varkappa\lambda}f_{\alpha\beta\mu\nu}\sqrt{x_{\alpha\gamma}x_{\beta\delta}}+f_{\alpha\gamma\varkappa\lambda}f_{\alpha\gamma\mu\nu}\sqrt{x_{\alpha\beta}x_{\gamma\delta}}.$$

Dass z. B. die rechte Seite der Gleichung (5.) ungeändert bleibt, wenn man 2 mit 3 vertauscht, folgt aus den Gleichungen (13.) § 2 und (2.). Vertauscht man ferner in der Gleichung (5.) 5 mit 6 oder 5 mit 7, und geht dabei die linke Seite in $\varepsilon'\sqrt{f}\sqrt{x_{46}x_{57}}$ oder $\varepsilon''\sqrt{f}\sqrt{x_{47}x_{65}}$ über, so können ε' und ε'' nach Formel (4.) nur gleich ± 1 sein. Addirt man aber die drei so erhaltenen Gleichungen, so findet man nach Formel (7.) § 3

$$\sqrt{x_{45}x_{67}}+\varepsilon'\sqrt{x_{46}x_{75}}+\varepsilon''\sqrt{x_{47}x_{56}} = 0.$$

Nach Gleichung (3.) muss daher

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = 1$$

sein. Endlich ist nach Gleichung (3.)

$$f_{2540}\sqrt{x_{23}x_{53}}+f_{2503}\sqrt{x_{24}x_{54}}+f_{2534}\sqrt{x_{20}x_{50}} = 0,$$
$$f_{1540}\sqrt{x_{13}x_{53}}+f_{1503}\sqrt{x_{14}x_{54}}+f_{1534}\sqrt{x_{10}x_{50}} = 0.$$

Eliminirt man daraus $\sqrt{x_{50}}$, so erhält man

$$\sqrt{x_{53}}(f_{2540}f_{1534}\sqrt{x_{23}x_{10}}-f_{1540}f_{2534}\sqrt{x_{13}x_{20}})$$
$$+\sqrt{x_{54}}(f_{2503}f_{1534}\sqrt{x_{24}x_{10}}-f_{1503}f_{2534}\sqrt{x_{14}x_{20}}) = 0.$$

Mit Hülfe dieser Beziehung zeigt man leicht, dass das Vorzeichen von $\sqrt{f}$ in der Gleichung (5.) auch ungeändert bleibt, wenn man 3 mit 4 vertauscht.

In Folge der Relationen (3.) kann man, wie ich D. § 8 (13.) gezeigt habe, eine Ebene u so bestimmen, dass

$$(7.) \quad \sqrt{x_{\beta\gamma}x_{\gamma\alpha}x_{\alpha\beta}} = (u, a_\alpha, a_\beta, a_\gamma) = u_{\alpha\beta\gamma}$$

wird. Wegen der Gleichungen (2.) kann man 16 Grössen $p_\lambda, q_\lambda (\lambda = 0, 1, \ldots 7)$

finden, welche den Bedingungen

$$(8.) \qquad \sqrt{x_{\alpha\beta}} = p_\alpha q_\beta - p_\beta q_\alpha$$

genügen. Dann ist

$$x_{\alpha\beta} = p_\alpha^2 q_\beta^2 - 2p_\alpha q_\alpha q_\beta p_\beta + q_\alpha^2 p_\beta^2$$

und mithin

$$\begin{vmatrix} x_{\alpha\alpha'} & x_{\alpha\beta'} & x_{\alpha\gamma'} \\ x_{\beta\alpha'} & x_{\beta\beta'} & x_{\beta\gamma'} \\ x_{\gamma\alpha'} & x_{\gamma\beta'} & x_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_\alpha^2 & p_\alpha q_\alpha & q_\alpha^2 \\ p_\beta^2 & p_\beta q_\beta & q_\beta^2 \\ p_\gamma^2 & p_\gamma q_\gamma & q_\gamma^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{\alpha'}^2 & -2q_{\alpha'} p_{\alpha'} & p_{\alpha'}^2 \\ q_{\beta'}^2 & -2q_{\beta'} p_{\beta'} & p_{\beta'}^2 \\ q_{\gamma'}^2 & -2q_{\gamma'} p_{\gamma'} & p_{\gamma'}^2 \end{vmatrix}.$$

Der erste Factor ist gleich

$$-(p_\beta q_\gamma - p_\gamma q_\beta)(p_\gamma q_\alpha - p_\alpha q_\gamma)(p_\alpha q_\beta - p_\beta q_\alpha).$$

Also ist

$$(9.) \qquad \begin{vmatrix} p_\alpha^2 & p_\alpha q_\alpha & q_\alpha^2 \\ p_\beta^2 & p_\beta q_\beta & q_\beta^2 \\ p_\gamma^2 & p_\gamma q_\gamma & q_\gamma^2 \end{vmatrix} = -\sqrt{x_{\beta\gamma} x_{\gamma\alpha} x_{\alpha\beta}} = -u_{\alpha\beta\gamma},$$

und folglich ist

$$(10.) \qquad x\begin{pmatrix} \alpha' \beta' \gamma' \\ \alpha \beta \gamma \end{pmatrix} = 2\sqrt{x_{\beta\gamma} x_{\gamma\alpha} x_{\alpha\beta} x_{\beta'\gamma'} x_{\gamma'\alpha'} x_{\alpha'\beta'}} = 2u_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

§ 6.

Die 36 *Hesse*schen Anordnungen der 28 Doppeltangenten.

Schreibt man die Gleichung (8.) § 3 in der Form

$$(1.) \qquad \frac{f x_{67}}{f_{0671} f_{0672} f_{0673}} = \sum_{\lambda}^{3}{}_1 \frac{f_{\lambda 674} f_{\lambda 675}}{f_{067\lambda}} x_{0\lambda}$$

und bedient man sich der Abkürzung (2.) § 4, so zeigt sie, dass

$$(2.) \qquad \frac{f x_{67}}{f_{067}} (a_0, a_6, a_7, u)(a_0, a_6, a_7, v) = \sum_{\lambda}^{5}{}_1 \frac{x_{0\lambda}(a_\lambda, a_6, a_7, u)(a_\lambda, a_6, a_7, v)}{f_{067\lambda}}$$

ist für $u = a_4$, $v = a_5$ und ebenso für $u = a_\varkappa$, $v = a_\lambda$, wo $\varkappa$ und λ irgend zwei verschiedene der Indices von 1 bis 7 bedeuten. Folglich ist diese Gleichung identisch erfüllt. Setzt man $u = v = a_5$, so erhält man

$$\frac{f x_{67} f_{0567}}{\prod_{\lambda}^{4}{}_1 f_{067\lambda}} = \sum_{\lambda}^{4}{}_1 \frac{f_{567\lambda}^2 x_{0\lambda}}{f_{067\lambda}}$$

und allgemein

$$(3.) \qquad \frac{f f_{\alpha\beta\gamma\delta} x_{\gamma\delta}}{\prod_{\lambda} f_{\alpha\gamma\delta\lambda}} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\beta\gamma\delta\lambda}^2 x_{\alpha\lambda}}{f_{\alpha\gamma\delta\lambda}},$$

wo λ die vier von α, β, γ, δ verschiedenen Indices durchläuft.

Ich theile nun die acht Indices in zwei Gruppen von je vier, nämlich 0 1 2 3 und 4 5 6 7, und setze zur Abkürzung

$$(4.)\quad \begin{cases} f_0 = \prod_4^7 f_{123\lambda}, & f_1 = \prod_4^7 f_{023\lambda}, & f_2 = \prod_4^7 f_{013\lambda}, & f_3 = \prod_4^7 f_{012\lambda}, \\ f_4 = \prod_0^3 f_{567\lambda}, & f_5 = \prod_0^3 f_{467\lambda}, & f_6 = \prod_0^3 f_{457\lambda}, & f_7 = \prod_0^3 f_{456\lambda}, \end{cases}$$

so dass

$$(5.)\quad f_0 f_1 f_2 f_3 = f_4 f_5 f_6 f_7$$

ist. Die Gleichung (6.) § 3 oder

$$(6.)\quad -\frac{f_{0123} f_{123\lambda}^2 x_{0\lambda}}{f_\lambda} = \frac{x_{23}}{f_{023\lambda}} + \frac{x_{31}}{f_{031\lambda}} + \frac{x_{12}}{f_{012\lambda}} \qquad (\lambda = 4, 5, 6, 7)$$

multiplicire man mit $f_{123\lambda}^2 y_{0\lambda}$ und summire nach λ von 4 bis 7. Dann erhält man

$$-f_{0123} \Sigma \frac{f_{123\lambda}^4 x_{0\lambda} y_{0\lambda}}{f_\lambda} = x_{23}\left(\Sigma \frac{f_{123\lambda}^2 y_{0\lambda}}{f_{023\lambda}}\right) + x_{31}\left(\Sigma \frac{f_{123\lambda}^2 y_{0\lambda}}{f_{031\lambda}}\right) + x_{12}\left(\Sigma \frac{f_{123\lambda}^2 y_{0\lambda}}{f_{023\lambda}}\right).$$

Nach Formel (3.) ist aber

$$\Sigma \frac{f_{123\lambda}^2 y_{0\lambda}}{f_{023\lambda}} = f_{0123} \frac{f y_{23}}{f_1},$$

und folglich ist

$$(7.)\quad \frac{f x_{23} y_{23}}{f_1} + \frac{f x_{31} y_{31}}{f_2} + \frac{f x_{12} y_{12}}{f_3} + \sum_4^7 \frac{f_{123\lambda}^4 x_{0\lambda} y_{0\lambda}}{f_\lambda} = 0.$$

In derselben Weise findet man die Gleichung

$$(8.)\quad \sum_0^3 \frac{f_{567\lambda}^4 x_{4\lambda} y_{4\lambda}}{f_\lambda} + \frac{f x_{67} y_{67}}{f_5} + \frac{f x_{75} y_{75}}{f_6} + \frac{f x_{56} y_{56}}{f_7} = 0.$$

Multiplicirt man aber die Gleichung (6.) mit $f_{023\lambda}^2 y_{1\lambda}$ und summirt nach λ von 4 bis 7, so erhält man

$$-f_{0123} \Sigma \frac{f_{123\lambda}^2 f_{023\lambda}^2 x_{0\lambda} y_{1\lambda}}{f_\lambda} = x_{23}(\Sigma f_{023\lambda} y_{1\lambda}) + x_{31}\left(\Sigma \frac{f_{023\lambda}^2 y_{1\lambda}}{f_{031\lambda}}\right) + x_{12}\left(\Sigma \frac{f_{023\lambda}^2 y_{1\lambda}}{f_{012\lambda}}\right)$$

und folglich nach (1.) § 3 und (3.)

$$(9.)\quad \frac{f x_{31} y_{03}}{f_2} + \frac{f x_{12} y_{20}}{f_3} + \sum_4^7 \frac{f_{123\lambda}^2 f_{023\lambda}^2 x_{0\lambda} y_{1\lambda}}{f_\lambda} = 0.$$

Ebenso findet man

$$(10.)\quad \sum_0^3 \frac{f_{567\lambda}^2 f_{467\lambda}^2 x_{4\lambda} y_{5\lambda}}{f_\lambda} + \frac{f x_{75} y_{47}}{f_6} + \frac{f x_{56} y_{64}}{f_7} = 0.$$

Aus zwei Gleichungssystemen von der Form

$$x_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} X_\beta, \quad U_\beta = \sum_\alpha c_{\alpha\beta} u_\alpha$$

folgt bekanntlich

$$\Sigma x_\alpha u_\alpha = \Sigma X_\beta U_\beta.$$

Solche zwei transponirte Systeme sind die folgenden:

$$-f_{0123}\frac{f_{123\lambda}^2 x_{0\lambda}}{f_\lambda} = \frac{x_{23}}{f_{023\lambda}} + \frac{x_{31}}{f_{031\lambda}} + \frac{x_{12}}{f_{012\lambda}} \qquad (\lambda = 5, 6, 7),$$

$$-f_{4567}\frac{f_{567\varkappa}^2 y_{4\varkappa}}{f_\varkappa} = \frac{y_{67}}{f_{467\varkappa}} + \frac{y_{75}}{f_{475\varkappa}} + \frac{y_{56}}{f_{456\varkappa}} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3).$$

Denn es ist

$$f_{0235} = -f_{4671}, \quad f_{0315} = -f_{4672} \quad \text{u. s. w.}$$

Mithin folgt aus ihnen

$$(11.) \quad \begin{cases} \dfrac{f_{5671}^2 x_{23} y_{41}}{f_1} + \dfrac{f_{5672}^2 x_{31} y_{42}}{f_2} + \dfrac{f_{5673}^2 x_{12} y_{43}}{f_3} \\ + \dfrac{f_{1235}^2 x_{05} y_{67}}{f_5} + \dfrac{f_{1236}^2 x_{06} y_{75}}{f_6} + \dfrac{f_{1237}^2 x_{07} y_{56}}{f_7} = 0. \end{cases}$$

Setzt man also, falls α, β, γ, δ die Zahlen 0, 1, 2, 3 und $\varkappa$, λ, μ, ν die Zahlen 4, 5, 6, 7 in irgend einer Reihenfolge sind,

$$(12.) \quad \begin{cases} x'_{\alpha\beta} = \dfrac{f x_{\gamma\delta}}{\sqrt{f_\alpha f_\beta}}, \quad x'_{\varkappa\lambda} = \dfrac{f x_{\mu\nu}}{\sqrt{f_\varkappa f_\lambda}}, \\ x'_{\alpha\varkappa} = \dfrac{\sqrt{f} f_{\beta\gamma\delta\varkappa}^2 x_{\alpha\varkappa}}{\sqrt{f_\alpha f_\varkappa}} = \dfrac{\sqrt{f} f_{\alpha\lambda\mu\nu}^2 x_{\alpha\varkappa}}{\sqrt{f_\alpha f_\varkappa}}, \end{cases}$$

so bestehen die identischen Gleichungen

$$(13.) \quad \sum_0^7{}_\lambda x'_{\alpha\lambda} y'_{\beta\lambda} = 0.$$

Da ich nun oben alle Beziehungen zwischen den Doppeltangenten einzig und allein aus den Gleichungen (2.) § 2 abgeleitet habe, so folgt aus diesen Identitäten, dass zwischen den Functionen $x'_{\alpha\beta}$ dieselben Relationen bestehen wie zwischen den Functionen $x_{\alpha\beta}$. Zu dem Gleichungssystem (2.) § 2 habe ich oben noch die Bedingung (8.) § 2 hinzugefügt. Damit für das Gleichungssystem (13.) die analoge Bedingung erfüllt sei, müssen die neun in den Formeln (12.) auftretenden Quadratwurzeln so gewählt werden, dass z. B.

$$x'\begin{pmatrix} 0123 \\ 0145 \end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix} 4567 \\ 0145 \end{pmatrix}$$

wird. Setzt man $x_{01} = x_{45} = 0$, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$\sqrt{f_4 f_5 f_6 f_7}(x_{02}x_{13} - x_{03}x_{12}) = \sqrt{f_0 f_1 f_2 f_3}(x_{46}x_{57} - x_{47}x_{56}).$$

Aus der Gleichung

$$x\binom{0123}{0145} = x\binom{4567}{0145}$$

erhält man aber, falls $x_{01} = x_{45} = 0$ ist,

$$x_{02}x_{13} - x_{03}x_{12} = x_{46}x_{57} - x_{47}x_{56}.$$

Mithin ist

$$(14.) \qquad \sqrt{f_0 f_1 f_2 f_3} = \sqrt{f_4 f_5 f_6 f_7}.$$

Die Anordnung (3.) § 2 der 28 Doppeltangenten in acht Zeilen und acht Colonnen will ich durch das (willkürlich gewählte) Symbol $[k]$ charakterisiren. Um daraus die neue Anordnung

$$(15.) \qquad x'_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots 7)$$

herzuleiten, habe ich die acht Indices in zwei Gruppen von je vier getheilt, 0123 und 4567. Daher will ich diese Anordnung durch das Symbol $[k0123]$ charakterisiren, welches ich mit $[k4567]$ als gleichbedeutend betrachte. In ähnlicher Weise entspricht jedem Symbol $[k\alpha\beta\gamma\delta] = [k\varkappa\lambda\mu\nu]$ eine bestimmte Anordnung der 28 Doppeltangenten in acht Zeilen und acht Colonnen. Zusammen mit der ursprünglichen sind dies 36 Anordnungen, die auch schon von ***Hesse*** (dieses Journal, Bd. 49, S. 306) angegeben sind. Was ich hier zu seinen Entwicklungen hinzugefügt habe, sind die constanten Factoren, mit welchen die Functionen $x_{\alpha\beta}$ multiplicirt werden müssen, damit sie in der neuen Anordnung genau denselben Gleichungen genügen, wie in der ursprünglichen. Sieht man von diesen Factoren ab, so lässt sich die Regel, nach der aus einer ***Hesse***schen Anordnung die übrigen abgeleitet werden, auf folgende einfache Form bringen: Man nehme irgend eine ***Steiner***sche Gruppe und vertausche je zwei Doppeltangenten mit einander, welche conjugirte Gerade in dieser Gruppe sind, lasse aber die übrigen 16 Doppeltangenten unverändert stehen. Nimmt man die Gruppe [0123], so erhält man aus der Anordnung $[k]$ die Anordnung $[k0123]$. Nimmt man aber die Gruppe [01], so werden in der Anordnung $[k]$ nur die beiden ersten Zeilen mit einander vertauscht und die beiden ersten Colonnen. Diese Anordnung bleibt also im Wesentlichen ungeändert.

Von den sieben Doppeltangenten, welche in irgend einer Reihe einer ***Hesse***schen Anordnung stehen, sind je drei azygetisch. Solche sieben Doppeltangenten will ich ein ***Aronhold***sches System nennen. Um ein solches zu construiren, nehme man zwei beliebige Doppeltangenten t_1 und t_2 und wähle

dann für t_3 irgend eine der 16, welche mit t_1 und t_2 azygetisch sind, für t_4 irgend eine der zehn, welche mit je zwei der Geraden t_1, t_2, t_3 azygetisch sind, für t_5 irgend eine der sechs, welche mit je zwei der Geraden t_1, t_2, t_3, t_4 azygetisch sind. Dann giebt es (vgl. § 10) eine ganz bestimmte Doppeltangente t, welche mit $t_1, \ldots t_5$ zusammen einen Kegelschnitt berührt. Diese ist mit je zwei dieser fünf Geraden azygetisch, darf aber nicht für t_6 genommen werden, weil es sonst nicht möglich wäre, t_7 den geforderten Bedingungen gemäss zu wählen. Ausser dieser Geraden t giebt es noch zwei andere t_6 und t_7, welche mit je zwei der Geraden $t_1, \ldots t_5$ azygetisch sind. Diese bilden mit ihnen zusammen ein *Aronhold*sches System *).

Die Anzahl dieser Systeme ist mithin

$$\frac{28.27.16.10.6.2.1}{1.2.3.4.5.6.7} = 288.$$

Jedes derselben bestimmt sieben andere, welche mit ihm zusammen eine *Hesse*sche Anordnung bilden, vollständig, und mithin ist die Anzahl der möglichen *Hesse*schen Anordnungen $288 : 8 = 36$. Ausser den oben entwickelten Anordnungen giebt es also keine weiteren.

§ 7.

Das Verhalten der Invarianten, Covarianten und Wurzelfunctionen beim Uebergang von einer *Hesse*schen Anordnung zu einer anderen.

Seien $f'_{\alpha\beta\gamma\delta}$, f', m', $G'_{\alpha\beta}$, $G'_{\alpha\beta\gamma\delta}$ die Grössen, welche aus den linearen Functionen $x'_{\alpha\beta}$ in derselben Weise abgeleitet sind, wie die Grössen $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$, f, m, $G_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$ aus den Functionen $x_{\alpha\beta}$. Dann ist

$$x'\begin{pmatrix}0\,1\,2\,3\\0\,1\,2\,3\end{pmatrix} = f'^2_{0123} F(x),$$

*) Alle Eigenschaften eines beliebigen Systems von Doppeltangenten sind bestimmt, sobald man von je drei derselben angeben kann, ob sie syzygetisch oder azygetisch sind, und ausserdem von je sechs (resp. acht) derselben, ob ihre Berührungspunkte auf einer Curve dritter (resp. vierter) Ordnung liegen oder nicht (vgl. dieses Journal, Bd. 89, S. 187). Es ist wohl bemerkenswerth, dass *Steiner* gerade diese *wesentlichen* Eigenschaften der Doppeltangenten in seiner grundlegenden Arbeit behandelt hat. Zu dieser Arbeit möchte ich bei dieser Gelegenheit noch die Bemerkung hinzufügen, dass immer, wenn durch die Berührungspunkte von zehn verschiedenen Doppeltangenten eine Curve fünfter Ordnung geht, die Berührungspunkte von sechs unter ihnen auf einer Curve dritter und die der beiden anderen auf einem Kegelschnitt liegen müssen, und dass allgemeiner, wenn durch die Berührungspunkte von $2n$ Doppeltangenten eine Curve $n$ter Ordnung geht, auch eine solche Curve $n$ter Ordnung durch sie gelegt werden kann, die in lauter Curven zweiter, dritter und vierter Ordnung zerfällt.

und mithin

$$f'^2_{0123} = f^2_{0123} \frac{f^4}{f_0 f_1 f_2 f_3}.$$

Die Grössen $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ waren nur bis auf einen allen gemeinsamen Factor genau definirt. Bedeutet aber F dieselbe Function wie bisher, so sind die Grössen $f'_{\alpha\beta\gamma\delta}$ bis auf ein allen gemeinsames Vorzeichen genau definirt, das willkürlich gewählt werden kann. Ich setze nun

$$(1.) \quad f'_{0123} = \frac{f^2}{\sqrt{f_0 f_1 f_2 f_3}} f_{0123}.$$

Die Functionaldeterminante $[x'_{\varkappa\lambda}, x'_{\mu\nu}, x'_{\varrho\sigma}]$ bezeichne ich mit $[\varkappa\lambda, \mu\nu, \varrho\sigma]'$. Dann ist nach Formel (9.) § 3

$$m' f'_{0123} = [01, 02, 03]' = \frac{f^3}{f_0 \sqrt{f_0 f_1 f_2 f_3}} [23, 31, 12] = -\frac{m f^3 f_{0123}}{\sqrt{f_0 f_1 f_2 f_3}}$$

und folglich

$$(2.) \quad m' = -m.$$

Ferner ist

$$m' f'_{0124} = [01, 02, 04]' = \frac{f^2 \sqrt{f} f^2_{1234}}{f_0 \sqrt{f_0 f_1 f_2 f_4}} [32, 31, 04] = \frac{m f \sqrt{f} \sqrt{f_4}}{\sqrt{f_0 f_1 f_2 f_{0124}}}$$

und daher

$$(3.) \quad f'_{0124} = -\frac{f \sqrt{f} \sqrt{f_4}}{\sqrt{f_0 f_1 f_2 f_{0124}}}.$$

Sodann ist

$$m' f'_{0145} = [01, 04, 05]' = \frac{f^2 f^2_{1234} f^2_{1235}}{f_0 \sqrt{f_0 f_1 f_4 f_5}} [23, 04, 05]$$

und mithin

$$(4.) \quad f'_{0145} = -\frac{f}{\sqrt{f_0 f_1 f_4 f_5}} f_{0145} f_{0234} f_{0235} f_{1234} f_{1235}.$$

Endlich ist

$$\frac{m'}{f'} \Pi f'_{012\lambda} = [12, 20, 01]' = \frac{f^3}{f_0 f_1 f_2} [30, 31, 32],$$

und folglich

$$(5.) \quad f' = \frac{f^4}{f_0 f_1 f_2 f_3} f.$$

Die Function G'_{0123} ist die Functionaldeterminante der drei Functionen $x'_{01} x'_{23}$, $x'_{02} x'_{31}$, $x'_{03} x'_{12}$ und kann sich daher von G_{0123} nur um einen constanten Factor unterscheiden. Ebenso ist, von einem constanten Factor abgesehen,

$$G'_{0124} = G_{34}, \quad G'_{0145} = G_{0145}, \quad G'_{01} = G_{01}, \quad G'_{45} = G_{45}, \quad G'_{34} = G_{0124}.$$

Ich will nun die constanten Factoren berechnen, um welche sich die Functionen G'_a von den Functionen G_a unterscheiden. Nach Formel (12.) § 4 ist

$$f'_{0123}G'_{0123} = x'_{23}x'_{31}x'_{12}+x'_{02}x'_{03}x'_{23}+x'_{03}x'_{01}x'_{31}+x'_{01}x'_{02}x'_{12}$$
$$= \frac{f^3}{f_0f_1f_2f_3}(f_0x_{01}x_{02}x_{03}+f_1x_{10}x_{12}x_{13}+f_2x_{20}x_{21}x_{23}+f_3x_{30}x_{31}x_{32}),$$

also nach Formel (13.) § 4

$$(6.) \qquad \frac{G'_{0123}}{f'_{0123}} = -\frac{G_{0123}}{f_{0123}}.$$

Ebenso ist

$$f'_{0124}G'_{0124} = x'_{01}x'_{02}x'_{12}+x'_{12}x'_{24}x'_{41}+x'_{02}x'_{04}x'_{24}+x'_{04}x'_{01}x'_{41}$$

und

$$ff_{3412}f_{3420}f_{3401}G_{34} = ff_{4012}x_{30}x_{31}x_{32}+f_{3420}f_{3401}f_{3125}f_{3126}f_{3127}x_{30}x_{41}x_{42}$$
$$+f_{3401}f_{3412}f_{3205}f_{3206}f_{3207}x_{40}x_{31}x_{42}+f_{3412}f_{3420}f_{3015}f_{3016}f_{3017}x_{40}x_{41}x_{32},$$

und folglich (vgl. § 8, (6.)),

$$(7.) \qquad \frac{G'_{0124}}{f'_{0124}} = G_{34}, \quad \frac{G'_{5673}}{f'_{5673}} = G_{43}.$$

Vertauscht man in dieser Herleitung die beiden Systeme $x_{\alpha\beta}$ und $x'_{\alpha\beta}$, so ergiebt sich

$$(8.) \qquad G'_{34} = \frac{G_{0124}}{f_{0124}}, \quad G'_{43} = \frac{G_{5673}}{f_{5673}}.$$

Stellt man nach Formel (12.) § 4 die Ausdrücke für G_{0145} und G'_{0145} auf und setzt in denselben $x_{04} = x_{05} = 0$, so erhält man

$$(9.) \qquad \frac{G'_{0145}}{f'_{0145}} = \frac{G_{0145}}{f_{0145}}.$$

Aus der Gleichung (5.) § 4 findet man die beiden Formeln

$$(10.) \qquad G'_{01} = G_{01}, \quad G'_{45} = G_{45},$$

die erste, indem man $\varkappa$, $\lambda = 0$, 1 und α, β, $\gamma = 5$, 6, 7 setzt, die zweite, indem man $\varkappa$, $\lambda = 4$, 5 und α, β, $\gamma = 0$, 1, 2 setzt.

Endlich will ich auch noch die Wurzelfunctionen $\sqrt{x'_{\alpha\beta}}$ durch die Functionen $\sqrt{x_{\alpha\beta}}$ ausdrücken. Dabei will ich, falls $\sqrt{a}$ definirt ist, unter $\sqrt[4]{a}$ immer eine der beiden Quadratwurzeln aus $\sqrt{a}$ verstehen und unter $\sqrt[4]{ab}$ das Product $\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}$. Die Grösse $\sqrt{f}$ nehme ich in den Formeln (12.) § 6

mit demselben Vorzeichen, wie in der Gleichung (6.) § 5. Setzt man dann

$$(11.)\quad \begin{cases} \sqrt{x'_{\alpha\beta}} = \dfrac{\sqrt{f}\sqrt{x_{\gamma\delta}}}{\sqrt[4]{f_\alpha f_\beta}}, \quad \sqrt{x'_{\varkappa\lambda}} = \dfrac{\sqrt{f}\sqrt{x_{\mu\nu}}}{\sqrt[4]{f_\varkappa f_\lambda}}, \\ \sqrt{x'_{\alpha\varkappa}} = \dfrac{\sqrt[4]{f}f_{\beta\gamma\delta\varkappa}\sqrt{x_{\alpha\varkappa}}}{\sqrt[4]{f_\alpha f_\varkappa}} = \dfrac{\sqrt[4]{f}f_{\alpha\lambda\mu\nu}\sqrt{x_{\alpha\varkappa}}}{\sqrt[4]{f_\alpha f_\varkappa}}, \\ \sqrt{x'_{\varkappa\alpha}} = -\sqrt{x'_{\alpha\varkappa}} = -\dfrac{\sqrt[4]{f}f_{\lambda\mu\nu\alpha}\sqrt{x_{\varkappa\alpha}}}{\sqrt[4]{f_\varkappa f_\alpha}} = -\dfrac{\sqrt[4]{f}f_{\varkappa\beta\gamma\delta}\sqrt{x_{\varkappa\alpha}}}{\sqrt[4]{f_\varkappa f_\alpha}}, \end{cases}$$

wo α, β, γ, δ eine eigentliche Permutation der Zahlen 0, 1, 2, 3 und $\varkappa$, λ, μ, ν eine solche der Zahlen 4, 5, 6, 7 ist, so überzeugt man sich leicht, dass die Relationen

$$\sqrt{x'_{\alpha\beta}x'_{\gamma\delta}}+\sqrt{x'_{\alpha\gamma}x'_{\delta\beta}}+\sqrt{x'_{\alpha\delta}x'_{\beta\gamma}} = 0$$

sämmtlich erfüllt sind. Unterwirft man ferner die in die obigen Formeln eingehenden vierten Wurzeln der Bedingung

$$(12.)\quad \sqrt[4]{f_0f_1f_2f_3} = \sqrt[4]{f_4f_5f_6f_7},$$

so ergiebt sich durch Uebertragung der Gleichung (5.) § 5 auf die neue Anordnung die Relation

$$(13.)\quad \sqrt{f'} = \frac{f^2}{\sqrt{f_0f_1f_2f_3}}\sqrt{f}.$$

§ 8.

Relationen zwischen den 63 Covarianten G_α.

Ist $e_{\alpha\alpha} = 1$ und $e_{\alpha\beta} = 0$, falls β von α verschieden ist, und ist r eine unbestimmte Grösse, so ist der Gleichung (12.) § 4 zufolge $2f_{\alpha\beta\gamma\delta}G_{\alpha\beta\gamma\delta}$ der Coefficient von r in der Determinante vierten Grades

$$|x_{\varkappa\lambda}+re_{\varkappa\lambda}| \qquad (\varkappa, \lambda = \alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Setzt man

$$x_{\varkappa\lambda}+re_{\varkappa\lambda} = r_{\varkappa\lambda}, \quad x_{\varkappa\lambda}-re_{\varkappa\lambda} = r'_{\varkappa\lambda},$$

so folgt aus der Formel (12.) § 2 die Relation

$$\sum_\lambda r_{\alpha\lambda}r'_{\lambda\beta} = -r^2e_{\alpha\beta}.$$

Daher ist das System der Elemente $-r'_{\alpha\beta}r^{-2}$ das reciproke des Systems $r_{\alpha\beta}$, und mithin ist jede Determinante fünften Grades aus dem System $r_{\alpha\beta}$ gleich

der complementären Determinante dritten Grades aus dem System $r'_{\alpha\beta}$, multiplicirt mit $-r^2$.

Seien $\varkappa$, λ veränderliche Indices, welche die vier festen Werthe α, β, γ, δ durchlaufen, und $\varkappa'$, λ' veränderliche Indices, welche die vier festen Werthe α', β', γ', δ' durchlaufen. In der Determinante vierten Grades

$$R = r\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\\ \alpha\beta\gamma\delta\end{pmatrix}$$

bezeichne ich die dem Elemente $r_{\varkappa\lambda}$ entsprechende Unterdeterminante mit $R_{\varkappa\lambda}$. Setzt man dann

$$r\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\lambda'\\ \alpha\beta\gamma\delta\varkappa'\end{pmatrix} = -r^2 S_{\varkappa'\lambda'},$$

so ist

$$-r^2 S_{\varkappa'\lambda'} = R r_{\varkappa'\lambda'} - \sum_{\varkappa,\lambda} R_{\varkappa\lambda} r_{\varkappa\lambda'} r_{\varkappa'\lambda} \qquad (\varkappa', \lambda' = \alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

und folglich nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten *)

$$|R r_{\varkappa'\lambda'} + r^2 S_{\varkappa'\lambda'}| = |R_{\varkappa\lambda}| \cdot |r_{\varkappa\lambda'}|^2.$$

Nach Gleichung (9.) § 2 ist $|R_{\varkappa\lambda}| = R^3$ (für unbestimmte Werthe von x) nicht durch r theilbar. Lässt man also in der erhaltenen Gleichung die durch r^2 theilbaren Glieder weg, und dividirt sie dann durch R^3, so erkennt man, dass

$$|r_{\varkappa\lambda}|\,|r_{\varkappa'\lambda'}| - |r_{\varkappa\lambda'}|^2$$

durch r^2 theilbar ist. Nun fängt aber die Entwicklung von $|r_{\varkappa\lambda}|$ nach Potenzen von r mit $f^2_{\alpha\beta\gamma\delta} F + 2 f_{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\alpha\beta\gamma\delta} r$ an und die von $|r_{\varkappa\lambda'}|$ mit $f_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} F$. Mithin ist der Coefficient von r^1 in dieser Determinante

$$(1.) \qquad \left[r\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\delta'\\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\end{pmatrix}\right]_{r^1} = f_{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}(x) + f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} G_{\alpha\beta\gamma\delta}(x).$$

Sind z. B. α', β', γ', δ' die vier von α, β, γ, δ verschiedenen Indices, die ich mit $\varkappa$, λ, μ, ν bezeichnen will, so sind die Grössen $e_{\varkappa\lambda'}$ sämmtlich Null, und mithin ist die Determinante (1.) von r unabhängig. Folglich ist

$$f_{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\varkappa\lambda\mu\nu} + f_{\varkappa\lambda\mu\nu} G_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$$

---

*) Die obige im Folgenden noch mehrfach benutzte Methode für die Untersuchung der Relationen zwischen den Unterdeterminanten eines Systems von Elementen verdankt man Herrn *Kronecker* (dieses Journal Bd. 72, S. 152 und Bd. 99, S. 340). Der Determinantensatz, auf den sich die Untersuchungen von *Hesse* gründen (dieses Journal Bd. 49, S. 251) ist ein ganz specieller Fall der Entwicklungen des Herrn *Kronecker*.

oder

$$(2.) \qquad \frac{G_{\varkappa\lambda\mu\nu}}{f_{\varkappa\lambda\mu\nu}} = -\frac{G_{\alpha\beta\gamma\delta}}{f_{\alpha\beta\gamma\delta}}, \quad G_{\varkappa\lambda\mu\nu} = -\varepsilon G_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

wo ε dieselbe Bedeutung hat, wie in Gleichung (11.) § 2.

Zwischen den Subdeterminanten eines symmetrischen Systems $r_{\alpha\beta}$ besteht nach Herrn *Kronecker* (Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1882, S. 821) die identische Gleichung

$$r\binom{\alpha\beta\gamma\varkappa}{\lambda\mu\nu\varrho}+r\binom{\alpha\beta\gamma\lambda}{\mu\nu\varrho\varkappa}+r\binom{\alpha\beta\gamma\mu}{\nu\varrho\varkappa\lambda}+r\binom{\alpha\beta\gamma\nu}{\varrho\varkappa\lambda\mu}+r\binom{\alpha\beta\gamma\varrho}{\varkappa\lambda\mu\nu} = 0.$$

Ist $\alpha'\beta'\gamma'\varkappa\lambda\mu\nu\varrho$ eine eigentliche Permutation der Indices 0, 1, ... 7, so ist der Coefficient von r^1 in der Determinante $r\binom{\alpha\beta\gamma\varkappa}{\lambda\mu\nu\varrho}$ gleich

$$f_{\lambda\mu\nu\varrho}G_{\alpha\beta\gamma\varkappa}+f_{\alpha\beta\gamma\varkappa}G_{\lambda\mu\nu\varrho} = f_{\alpha'\beta'\gamma'\varkappa}G_{\alpha\beta\gamma\varkappa}-f_{\alpha\beta\gamma\varkappa}G_{\alpha'\beta'\gamma'\varkappa}.$$

Aus jener Identität ergiebt sich folglich die Relation

$$(3.) \qquad \sum_{\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\lambda}G_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(x) = \sum_{\lambda} f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}G_{\alpha\beta\gamma\lambda}(x).$$

Sind α, β, γ, α', β', γ' sechs verschiedene Indices, so ist diese Gleichung eine Folge der Gleichung (2.); sind nur fünf dieser Indices verschieden, so ist sie eine lineare Relation zwischen gewissen sechs der Functionen $G_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Durchläuft ν die Indices α, β, γ und ν' die Indices α', β', γ', und ist in der Determinante dritten Grades

$$R = r\binom{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\ \beta\ \gamma}$$

die dem Elemente $r_{\nu\nu'}$ entsprechende Unterdeterminante gleich $R_{\nu\nu'}$, so ist

$$r\binom{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \lambda} = Rr_{\lambda\lambda}-\sum_{\nu,\nu'} R_{\nu\nu'}r_{\nu\lambda}r_{\lambda\nu'}$$

und mithin nach Formel (1.)

$$f_{\alpha\beta\gamma\lambda}G_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}+f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}G_{\alpha\beta\gamma\lambda} = [Rr-\sum_{\nu,\nu'} R_{\nu\nu'}r_{\nu\lambda}r_{\lambda\nu'}]_{r^1}.$$

Nun folgt aber aus der Gleichung (12.) § 2

$$\sum_{\lambda}^{7}{}_{0} r_{\nu\lambda}r_{\lambda\nu'} = 2rr_{\nu\nu'}-r^2e_{\nu\nu'}.$$

Mit Berücksichtigung der Relation (3.) ergiebt sich daher

$$2\sum_{\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\lambda}G_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} = [8Rr-2r\sum_{\nu,\nu'} R_{\nu\nu'}r_{\nu\nu'}]_{r^1},$$

also weil

$$\sum_{\nu} R_{\nu\nu'}r_{\nu\nu'} = R$$

ist,

$$\sum_{\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\lambda} G_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} = [R]_{r^0}$$

oder

$$(4.) \qquad x\binom{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\ \beta\ \gamma} = \sum_{\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\lambda} G_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(x).$$

Entwickelt man mittelst dieser Formel die Determinante $x\binom{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta}$ nach den Elementen der ersten Zeile, so erhält man

$$f_{\alpha\beta\gamma\delta} f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} F = x_{\alpha\alpha'}\left(\sum_{\lambda} G_{\lambda\beta\gamma\delta} f_{\lambda\beta'\gamma'\delta'}\right) - x_{\alpha\beta'}\left(\sum_{\lambda} G_{\lambda\beta\gamma\delta} f_{\lambda\alpha'\gamma'\delta'}\right)$$
$$+ x_{\alpha\gamma'}\left(\sum_{\lambda} G_{\lambda\beta\gamma\delta} f_{\lambda\alpha'\beta'\delta'}\right) - x_{\alpha\delta'}\left(\sum_{\lambda} G_{\lambda\beta\gamma\delta} f_{\lambda\alpha'\beta'\gamma'}\right),$$

also, weil nach Formel (1.) § 3

$$f_{\lambda\beta'\gamma'\delta'} x_{\alpha\alpha'} - f_{\lambda\alpha'\gamma'\delta'} x_{\alpha\beta'} + f_{\lambda\alpha'\beta'\delta'} x_{\alpha\gamma'} - f_{\lambda\alpha'\beta'\gamma'} x_{\alpha\delta'} = f_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} x_{\alpha\lambda}$$

ist,

$$(5.) \qquad \sum_{\lambda} x_{\alpha\lambda} G_{\lambda\beta\gamma\delta}(x) = f_{\alpha\beta\gamma\delta} F(x),$$

wo α nicht von β, γ, δ verschieden zu sein braucht.

Endlich will ich noch zeigen, dass

$$(6.) \qquad \sum_{\lambda} G_{\alpha\beta\gamma\lambda}(x) G_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}(x) = F(x)\left[r\binom{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\ \beta\ \gamma}\right]_{r^1}$$

ist. Zu dem Zwecke setze ich, indem ich α, β, γ, α', β', γ' als feste, $\varkappa$, λ als veränderliche Indices betrachte,

$$\sum_{\lambda} G_{\varkappa\beta\gamma\lambda} G_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} - F\left[r\binom{\alpha'\beta'\gamma'}{\varkappa\ \beta\ \gamma}\right]_{r^1} = V_{\varkappa}.$$

Nun ist

$$\sum_{\varkappa} x_{\alpha\varkappa} r_{\varkappa\alpha'} = r x_{\alpha\alpha'}$$

und

$$\sum_{\varkappa} x_{\alpha\varkappa} G_{\varkappa\beta\gamma\lambda} = f_{\alpha\beta\gamma\lambda} F,$$

und folglich ist

$$\sum_{\varkappa} x_{\alpha\varkappa} V_{\varkappa} = F \sum_{\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\lambda} G_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} - F x\binom{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\ \beta\ \gamma} = 0.$$

Für $\varkappa = \beta$ oder γ verschwindet $V_{\varkappa}$ identisch. Angenommen nun, es sei bereits bewiesen, dass $V_{\varkappa} = 0$ ist, falls $\varkappa$ keinem der Indices α', β', γ' gleich ist, so reducirt sich die obige Gleichung auf

$$x_{\alpha\alpha'} V_{\alpha'} + x_{\alpha\beta'} V_{\beta'} + x_{\alpha\gamma'} V_{\gamma'} = 0,$$

und da diese Gleichung für jeden Werth von α besteht, so ist auch

$$V_{\alpha'} = V_{\beta'} = V_{\gamma'} = 0.$$

Gilt also die Gleichung (6.) immer, falls unter den sechs Indices $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ genau ϱ verschieden sind, so gilt sie auch, falls unter ihnen nur $\varrho-1$ verschieden sind. Nun ist aber, wenn jene sechs Indices alle verschieden und μ, ν die beiden noch übrigen Indices sind,

$$G_{\alpha\beta\gamma\mu} = \pm G_{\alpha'\beta'\gamma'\nu} \quad \text{und} \quad G_{\alpha\beta\gamma\nu} = \mp G_{\alpha'\beta'\gamma'\mu}$$

und folglich

$$\sum_{\lambda} G_{\alpha\beta\gamma\lambda} G_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} = 0.$$

Damit ist die Gleichung (6.) allgemein dargethan, z. B. ist

$$(7.) \quad \begin{cases} \sum_{\lambda}^{7_5} G_{012\lambda}(x) G_{034\lambda}(x) = F(x)(x_{13}x_{24} - x_{14}x_{23}), \\ \sum_{\lambda}^{7_4} G_{012\lambda}(x) G_{013\lambda}(x) = -F(x)(x_{02}x_{03} + x_{12}x_{13}), \\ \sum_{\lambda}^{7_3} G^2_{012\lambda}(x) = -F(x)(x^2_{01} + x^2_{02} + x^2_{12}). \end{cases}$$

Jede der aufgestellten Formeln lässt sich mit Hülfe der in § 6 und § 7 entwickelten Uebertragungsmethode auf viele verschiedene Gestalten bringen. Aus der grossen Zahl von Formeln, die sich so ergeben, hebe ich nur die folgenden hervor:

Nach Formel (3.) ist

$$\sum_{\lambda} (f'_{123\lambda} G'_{034\lambda} - f'_{034\lambda} G'_{123\lambda}) = 0,$$

also

$$\sum_{\lambda} f_{012\lambda} (G_{034\lambda} - f_{034\lambda} G_{0\lambda}) = 0$$

und ebenso allgemein

$$(8.) \quad \sum_{\lambda} (f_{\alpha\beta\gamma\lambda} G_{\alpha\lambda} - G_{\alpha\beta\gamma\lambda}) f_{\alpha\beta'\gamma'\lambda} = 0.$$

Daher verschwindet der Ausdruck

$$\sum_{\lambda} (f_{\alpha\beta\gamma\lambda} G_{a\lambda} - G_{a\beta\gamma\lambda})(u, v, a_a, a_\lambda)$$

für $u = a'_\beta$, $v = a'_\gamma$, falls β', γ' irgend zwei der sechs von β, γ verschiedenen Indices sind, und folglich verschwindet er identisch. Somit gilt die Gleichung (8.) ohne jede Einschränkung, und mithin ist nach Formel (4.)

$$(9.) \quad x\binom{\alpha\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\lambda} f_{\alpha\beta'\gamma'\lambda} G_{a\lambda} = \sum_{\lambda} f_{\alpha\beta\gamma\lambda} G_{\alpha\beta'\gamma'\lambda} = \sum_{\lambda} f_{\alpha\beta'\gamma'\lambda} G_{\alpha\beta\gamma\lambda}.$$

Setzt man also

$$(10.) \quad \sum_{\lambda} G_{0\lambda}(x) y^2_{0\lambda} = 2L_0(x, y),$$

so hat die quadratische Function L_0 der Variabeln y nach Formel (9.) § 3 für $y_{0\alpha} = y_{0\beta} = 0$ den Werth

$$\tfrac{1}{2} m^2 \sum_\lambda f^2_{0\alpha\beta\lambda} G_{0\lambda} = m^2 x_{0\alpha} x_{0\beta} x_{\alpha\beta},$$

und daher ist L_0 bis auf einen constanten Factor mit der Function identisch, welche ich D. § 2 (9.) mit L bezeichnet habe. Ist also x ein gegebener Punkt, so ist $L_\alpha(x, y) = 0$ die Gleichung der beiden Geraden, welche sich in x schneiden und zusammen mit den sieben Geraden $a_{\alpha 0}, \ldots a_{\alpha 7}$ die neun gemeinsamen Tangenten zweier Curven dritter Klasse bilden. Ist aber y ein gegebener Punkt, so sind $L_\alpha(x, y) = 0$ $(\alpha = 0, 1, \ldots 7)$ die Gleichungen der acht Berührungscurven dritter Ordnung der Curve $F = 0$ von der Charakteristik $[k]$, welche in y einen gewöhnlichen Doppelpunkt haben. (Vgl. D. S. 281, Anm. II.)

Nach Formel (5.) ist

$$f'_{0123} F = \sum_\lambda x'_{0\lambda} G'_{\lambda 123},$$

also

$$-f_{0123} F = \sum_\lambda x_{0\lambda} G_{0\lambda} f_{\lambda 123}$$

und allgemein

$$(11.) \qquad -f_{\alpha\beta\gamma\delta} F(x) = \sum_\lambda x_{\alpha\lambda} G_{\alpha\lambda}(x) f_{\lambda\beta\gamma\delta}.$$

Folglich ist auch

$$(12.) \qquad -z_\alpha F(x) = \sum_\lambda x_{\alpha\lambda} G_{\alpha\lambda}(x) z_\lambda,$$

und daher, wenn man $z_\alpha = z_\beta = z_\gamma = 0$ setzt:

$$(13.) \qquad \sum_\lambda f_{\alpha\beta\ \lambda} x_{\alpha\lambda} G_{\alpha\lambda}(x) = 0.$$

Die Gleichung (11.) gilt also auch, wenn α einem der Indices β, γ, δ gleich ist.

§ 9.

Die 5040 Systeme von sechs Doppeltangenten, deren Berührungspunkte auf einer Curve dritter Ordnung liegen, und die ein *Pascal*sches Sechseck bilden.

Ist in der Determinante $X = x\binom{\alpha\ \beta\ \gamma}{\alpha\ \beta\ \gamma}$ die dem Elemente $x_{\varkappa\lambda}$ entsprechende Unterdeterminante gleich $X_{\varkappa\lambda}$, und setzt man $F_{\varkappa'\lambda'} = x\binom{\alpha\ \beta\ \gamma\ \lambda'}{\alpha\ \beta\ \gamma\ \varkappa'}$, so ist

$$F_{\varkappa'\lambda'} = X x_{\varkappa'\lambda'} - \sum_{\varkappa,\lambda} X_{\varkappa\lambda} x_{\varkappa\lambda'} x_{\varkappa'\lambda}.$$

Giebt man jedem der beiden Indices $\varkappa'$, λ' die Werthe α', β', γ', so folgt daraus

$$|X x_{\varkappa'\lambda'} - F_{\varkappa'\lambda'}| = |X_{\varkappa\lambda}| . |x_{\varkappa\lambda'}|^2.$$

Nun ist aber $F_{\varkappa'\lambda'} = f_{\alpha\beta\gamma\varkappa'} f_{\alpha\beta\gamma\lambda'} F$, und mithin ist

$$|X x_{\varkappa'\lambda'} - F_{\varkappa'\lambda'}| = \begin{vmatrix} 1 & f_{\alpha\beta\gamma\alpha'}F & f_{\alpha\beta\gamma\beta'}F & f_{\alpha\beta\gamma\gamma'}F \\ f_{\alpha\beta\gamma\alpha'} & X x_{\alpha'\alpha'} & X x_{\alpha'\beta'} & X x_{\alpha'\gamma'} \\ f_{\alpha\beta\gamma\beta'} & X x_{\beta'\alpha'} & X x_{\beta'\beta'} & X x_{\beta'\gamma'} \\ f_{\alpha\beta\gamma\gamma'} & X x_{\gamma'\alpha'} & X x_{\gamma'\beta'} & X x_{\gamma'\gamma'} \end{vmatrix} = X^3 |x_{\varkappa'\lambda'}| + X^2 F S,$$

wo

$$S = \begin{vmatrix} 0 & f_{\alpha\beta\gamma\alpha'} & f_{\alpha\beta\gamma\beta'} & f_{\alpha\beta\gamma\gamma'} \\ f_{\alpha\beta\gamma\alpha'} & 0 & x_{\alpha'\beta'} & x_{\alpha'\gamma'} \\ f_{\alpha\beta\gamma\beta'} & x_{\beta'\alpha'} & 0 & x_{\beta'\gamma'} \\ f_{\alpha\beta\gamma\gamma'} & x_{\gamma'\alpha'} & x_{\gamma'\beta'} & 0 \end{vmatrix}$$

oder

$$(1.) \qquad S(x) = N(\sqrt{f_{\alpha\beta\gamma\alpha'} x_{\beta'\gamma'}} + \sqrt{f_{\alpha\beta\gamma\beta'} x_{\gamma'\alpha'}} + \sqrt{f_{\alpha\beta\gamma\gamma'} x_{\alpha'\beta'}})$$

ist. Da nun $|x_{\varkappa\lambda}| = 2 x_{\beta\gamma} x_{\gamma\alpha} x_{\alpha\beta}$ und $|X_{\varkappa\lambda}| = X^2$ ist, so ergiebt sich die Relation

$$(2.) \qquad \left[x\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}\right]^2 - 4 x_{\beta\gamma} x_{\gamma\alpha} x_{\alpha\beta} x_{\beta'\gamma'} x_{\gamma'\alpha'} x_{\alpha'\beta'} = F(x) S(x).$$

Wegen der Symmetrie dieser Gleichung ist auch

$$(3.) \qquad S(x) = N(\sqrt{f_{\alpha'\beta'\gamma'\alpha} x_{\beta\gamma}} + \sqrt{f_{\alpha'\beta'\gamma'\beta} x_{\gamma\alpha}} + \sqrt{f_{\alpha'\beta'\gamma'\gamma} x_{\alpha\beta}}).$$

Ist $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \delta$, so ist $S = f^2_{\alpha\beta\gamma\delta} x^2_{\alpha\beta}$, und es ist die Gleichung (2.) mit der Formel (4.) § 2 identisch.

Ist nur $\gamma' = \gamma$, so erhält man

$$(4.) \qquad \left[x\begin{pmatrix} \varkappa & \gamma & \delta \\ \varkappa & \alpha & \beta \end{pmatrix}\right]^2 - 4 x_{\varkappa\alpha} x_{\varkappa\beta} x_{\varkappa\gamma} x_{\varkappa\delta} x_{\alpha\beta} x_{\gamma\delta} = F(x)(f_{\varkappa\alpha\gamma\delta} x_{\varkappa\beta} - f_{\varkappa\beta\gamma\delta} x_{\varkappa\alpha})^2.$$

Aus den Formeln (9.) und (10.) § 3 ergiebt sich

$$(5.) \qquad f_{\varkappa\alpha\gamma\delta} x_{\varkappa\beta} - f_{\varkappa\beta\gamma\delta} x_{\varkappa\alpha} = f_{\varkappa\delta\alpha\beta} x_{\varkappa\gamma} - f_{\varkappa\gamma\alpha\beta} x_{\varkappa\delta} = \frac{f_{\varkappa\gamma\delta\alpha} f_{\varkappa\gamma\delta\beta} x_{\alpha\beta} - f_{\varkappa\alpha\beta\gamma} f_{\varkappa\alpha\beta\delta} x_{\gamma\delta}}{f_{\alpha\beta\gamma\delta}}.$$

Ueberträgt man diese Formeln auf andere *Hesse*sche Anordnungen, so erkennt man, dass nicht nur die drei Punkte

$$(6.) \qquad (a_{\varkappa\alpha}, a_{\varkappa\beta}), \quad (a_{\varkappa\gamma}, a_{\varkappa\delta}), \quad (a_{\alpha\beta}, a_{\gamma\delta})$$

auf einer Geraden $\sqrt{S} = 0$ liegen, sondern auch die drei Punkte

$$(7.) \qquad (a_{\beta\gamma'}, a_{\gamma\beta'}), \quad (a_{\gamma\alpha'}, a_{\alpha\gamma'}), \quad (a_{\alpha\beta'}, a_{\beta\alpha'})$$

und die drei Punkte

$$(8.) \quad (a_{\varkappa\alpha}, a_{\varkappa\beta}), \quad (a_{\lambda\gamma}, a_{\lambda\delta}), \quad (a_{\varkappa\lambda}, a_{\varrho\sigma}).$$

Die 12 Berührungspunkte von sechs solchen Doppeltangenten liegen nach (4.) auf einer Curve dritten Grades. Solche drei Paare von Doppeltangenten sind dadurch charakterisirt, dass je drei Geraden aus drei verschiedenen Paaren syzygetisch, je drei Geraden aus zwei Paaren aber azygetisch sind *). Um solche sechs Geraden zu bestimmen, wähle man beliebige vier Doppeltangenten, von denen je vier azygetisch sind, was auf

$$\frac{28.27.16.10}{1.2.3.4} = 5040$$

Arten möglich ist, und theile sie in zwei Paare, was auf drei Arten geht. Schneidet sich das erste Paar in A und das andere in B, so geht die Gerade AB durch den Schnittpunkt C eines ganz bestimmten dritten Paares. So erhält man jede Gerade ABC drei Mal ($BC = CA = AB$), und mithin ist die Anzahl dieser Geraden 5040. Die Anzahl der Geraden von den Formen (6.), (7.) und (8.) ist

$$840 + 1680 + 2520 = 5040.$$

§ 10.

Die 1008 Systeme von sechs Doppeltangenten, deren Berührungspunkte auf einer Curve dritter Ordnung liegen, und die ein *Brianchon*sches Sechsseit bilden.

Sind in der Formel (2.) § 9 die sechs Indices verschieden, so ist $S = 0$ den Gleichungen (1.) und (3.) § 9 zufolge die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher die sechs Doppeltangenten

$$(1.) \quad a_{\beta\gamma}, \quad a_{\gamma\alpha}, \quad a_{\alpha\beta}, \quad a_{\beta'\gamma'}, \quad a_{\gamma'\alpha'}, \quad a_{\alpha'\beta'}$$

berührt. Durch fünf derselben ist die sechste vollständig bestimmt. Für jene fünf aber können fünf beliebige Doppeltangenten genommen werden, von denen je drei azygetisch sind. Folglich ist die Anzahl dieser Systeme **) gleich

$$\frac{28.27.16.10.6.1}{1.2.3.4.5.6} = 1008.$$

---

*) Umgekehrt sind in einer *Steiner*schen Gruppe je drei Geraden aus drei verschiedenen Paaren azygetisch, je drei Geraden aus zwei Paaren aber syzygetisch.

**) Dass die Anzahl aller eigentlichen Curven dritter Ordnung, welche durch die Berührungspunkte von sechs Doppeltangenten gehen, gleich 6048 ist, hat *Steiner* gefunden. *Hesse* aber hat (dieses Journal, Bd. 55, S. 83) die wichtige Bemerkung gemacht, dass diese Curven in zwei wesentlich verschiedene Systeme von 5040 und 1008 Curven zerfallen.

Sei $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \varkappa, \lambda$ eine eigentliche Permutation der acht Indices 0, 1, ... 7. Da die sechs Geraden (1.) diejenigen sechs Doppeltangenten sind, welche die beiden *Steiner*schen Gruppen $[\alpha\beta\gamma\varkappa]$ und $[\alpha\beta\gamma\lambda]$ gemeinsam haben, so setze ich in diesem Falle $S = S_{\alpha\beta\gamma\varkappa, \alpha\beta\gamma\lambda} = S_{\alpha\beta\gamma\lambda, \alpha\beta\gamma\varkappa}$ und

$$(2.) \qquad x\binom{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\,\beta\,\gamma} = G_{\alpha\beta\gamma\varkappa, \alpha\beta\gamma\lambda} = -G_{\alpha\beta\gamma\lambda, \alpha\beta\gamma\varkappa}.$$

Dann ist

$$(3.) \qquad G^2_{\alpha\beta\gamma\varkappa, \alpha\beta\gamma\lambda}(x) - 4x_{\beta\gamma}x_{\gamma\alpha}x_{\alpha\beta}x_{\beta'\gamma'}x_{\gamma'\alpha'}x_{\alpha'\beta'} = F(x)S_{\alpha\beta\gamma\varkappa, \alpha\beta\gamma\lambda}(x).$$

Ebenso ist, wie ich unten noch näher ausführen werde, allgemein, wenn $[a]$ und $[b]$ zwei azygetische Gruppencharakteristiken sind,

$$(4.) \qquad G^2_{a,b} - 4\Pi(x_{\varkappa\lambda}) = FS_{a,b},$$

wo $x_{\varkappa\lambda}$ die sechs Doppeltangenten durchläuft, welche den beiden durch $[a]$ und $[b]$ charakterisirten Gruppen gemeinsam sind.

Nun ist aber nach Formel (4.) § 8

$$x\binom{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\,\beta\,\gamma} = f_{\alpha'\beta'\gamma'\varkappa}G_{\alpha\beta\gamma\varkappa} + f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda}G_{\alpha\beta\gamma\lambda},$$

also

$$(5.) \qquad G_{\alpha\beta\gamma\varkappa, \alpha\beta\gamma\lambda} = f_{\alpha\beta\gamma\lambda}G_{\alpha\beta\gamma\varkappa} - f_{\alpha\beta\gamma\varkappa}G_{\alpha\beta\gamma\lambda}.$$

Diese Formel enthält folgenden merkwürdigen Satz:

Die sechs Doppeltangenten einer Curve vierten Grades, welche zwei azygetische Steinersche Gruppen gemeinsam haben, berühren einen Kegelschnitt. Ihre 18 Berührungspunkte mit der Curve vierten Grades und dem Kegelschnitt liegen auf einer Curve dritten Grades. Dieselbe geht auch durch die neun Schnittpunkte der beiden Jacobischen Curven dritten Grades, welche zu den beiden Steinerschen Gruppen gehören.

Den $63.16 = 1008$ Paaren von zwei azygetischen *Steiner*schen Gruppen entsprechen ebenso viele Curven dritten Grades $G_{a,b} = 0$. Jede der 1008 Covarianten $G_{a,b}$ lässt sich aus zwei bestimmten der 63 Covarianten G_c, nämlich aus G_a und G_b linear zusammensetzen.

Ich habe D. § 10 eine andere Eigenschaft der Curven $G_{a,b}$ entwickelt: Die sechs Doppeltangenten (1.) lassen sich nicht durch eine siebente zu einem *Aronhold*schen System ergänzen. Lässt man aber irgend eine derselben weg, z. B. $a_{\beta'\gamma'}$, so bilden die fünf übrigen zusammen mit $a_{\alpha'\varkappa}$ und $a_{\alpha'\lambda}$ (und nur mit diesen beiden) ein *Aronhold*sches System. Bestimmt man nun alle Paare von Linien, welche gleichzeitig in Bezug auf den Kegel-

schnitt $S_{\alpha\beta\gamma\varkappa,\,\alpha\beta\gamma\lambda} = 0$ harmonische Polaren sind, und zusammen mit den sieben Geraden

$$(6.) \qquad a_{\beta\gamma},\quad a_{\gamma\alpha},\quad a_{\alpha\beta},\quad a_{\alpha'\beta'},\quad a_{\alpha'\gamma'},\quad a_{\alpha'\varkappa},\quad a_{\alpha'\lambda}$$

die neun gemeinsamen Tangenten zweier Curven dritter Klasse bilden, so ist der Ort der Scheitel dieser Linienpaare die Curve $G_{\alpha\beta\gamma\varkappa,\,\alpha\beta\gamma\lambda} = 0$. Dabei ist es gleichgültig, welche der sechs Doppeltangenten (1.) weggelassen wird. Ist dies $a_{\beta\gamma}$, so bilden

$$(7.) \qquad a_{\alpha\beta},\quad a_{\alpha\gamma},\quad a_{\alpha\varkappa},\quad a_{\alpha\lambda},\quad a_{\beta'\gamma'},\quad a_{\gamma'\alpha'},\quad a_{\alpha'\beta'}$$

ein *Aronhold*sches System. Demnach ist $G_{\alpha\beta\gamma\varkappa,\,\alpha\beta\gamma\lambda} = 0$ auch der Ort der Scheitel der Linienpaare, welche zusammen mit den sieben Geraden (7.) die neun gemeinsamen Tangenten zweier Curven dritter Klasse bilden, und gleichzeitig zusammen mit den sieben Geraden (6.) (wenigstens ein Theil dieses Ortes). Um zwei Systeme wie (6.) und (7.) zu construiren, kann man beliebig vier Doppeltangenten auswählen, von denen je drei azygetisch sind. Dieselben lassen sich dann stets auf zwei und nicht mehr Arten zu einem *Aronhold*schen Systeme ergänzen.

Wendet man die Formeln (1.), (2.), (3.), § 9 und (5.) auf die Determinante $x'\binom{0\,4\,5}{1\,2\,3}$ an, so erhält man die Gleichung

$$(8.) \qquad (G_{06}-G_{07})^2-\frac{4}{f}\,x_{01}x_{02}x_{03}x_{04}x_{05}x_{67} \;=\; F.S_{06,\,07}.$$

Hier ist

$$(9.) \qquad \begin{vmatrix} x_{23} & x_{31} & x_{12} \\ f_{0234}^2 x_{41} & f_{0314}^2 x_{42} & f_{0124}^2 x_{43} \\ f_{0235}^2 x_{51} & f_{0315}^2 x_{52} & f_{0125}^2 x_{53} \end{vmatrix} \;=\; f f_{1234} f_{0467} (G_{06}-G_{07})$$

und

$$(10.) \qquad S_{06,\,07} \;=\; N(\sqrt{f_{0145}f_{0234}f_{0235}x_{01}}+\sqrt{f_{0245}f_{0314}f_{0315}x_{02}}+\sqrt{f_{0345}f_{0124}f_{0125}x_{03}})$$

oder

$$(11.) \qquad f_{1234}^2 f_{1235}^2 S_{06,\,07} = N(\sqrt{-f f_{0123}x_{67}}+f_{1234}\sqrt{f_{0523}f_{0531}f_{0512}x_{04}}+f_{1235}\sqrt{f_{0423}f_{0431}f_{0412}x_{05}}).$$

Ich habe D. § 10, wo ich den Index 0 bevorzugt habe, $S_{06,\,07}$ kurz mit S_{67} und $G_{06,\,07}$ mit R_{67} bezeichnet. Dass diese Function mit $G_{06}-G_{07}$ identisch ist, lässt sich auf dem dort eingeschlagenen Wege am einfachsten aus der Gleichung (10.) § 8 erkennen. Wendet man jene Formeln aber auf die Determinante $x'\binom{5\,6\,7}{1\,2\,3}$ an, so erhält man die Gleichung

$$(12.) \qquad \frac{f(f_{0123}G_{04}+G_{0123})^2}{f_{1234}^2}-4x_{01}x_{02}x_{03}x_{45}x_{46}x_{47} \;=\; F.S_{04,\,0123}.$$

Hier ist

$$(13.)\qquad \begin{vmatrix} f_{0235}^2 x_{15} & f_{0236}^2 x_{16} & f_{0237}^2 x_{17} \\ f_{0315}^2 x_{25} & f_{0316}^2 x_{26} & f_{0317}^2 x_{27} \\ f_{0125}^2 x_{35} & f_{0126}^2 x_{36} & f_{0127}^2 x_{37} \end{vmatrix} = \frac{f^2}{f_{0567}}(f_{0123} G_{04} + G_{0123})$$

und

$$(14.)\qquad f S_{04,0123} = N(\sqrt{f_{0235} f_{0236} f_{0237} x_{01}} + \sqrt{f_{0315} f_{0316} f_{0317} x_{02}} + \sqrt{f_{0125} f_{0126} f_{0127} x_{03}}).$$

Die Anzahl der Systeme von sechs Doppeltangenten, wie sie in den Gleichungen (8.), (3.) und (12.) auftreten, ist $168+280+560 = 1008$.

§ 11.

Relationen zwischen den Covarianten G_a und den Wurzelfunctionen.

Ist $F = 0$, so folgt aus der Gleichung (4.) § 10 die Relation

$$\pm 2\Pi\sqrt{x_{\varkappa\lambda}} = G_{a,b} = G_a - G_b.$$

Die hier auftretenden Vorzeichen findet man auf folgendem Wege.

Nach Formel (10.) § 5 und (4.) § 8 ist

$$(1.)\qquad \sum_\lambda f_{\alpha'\beta'\gamma'\lambda} G_{\alpha\beta\gamma\lambda} = 2\sqrt{x_{\beta\gamma} x_{\gamma a} x_{a\beta} x_{\beta'\gamma'} x_{\gamma' a'} x_{a'\beta'}},$$

und folglich

$$(2.)\qquad f_{\alpha\beta\gamma\sigma} G_{\alpha\beta\gamma\varrho} - f_{\alpha\beta\gamma\varrho} G_{\alpha\beta\gamma\sigma} = 2\varepsilon\sqrt{x_{\beta\gamma} x_{\gamma a} x_{a\beta} x_{\lambda\mu} x_{\mu\varkappa} x_{\varkappa\lambda}},$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, je nachdem $\alpha\beta\gamma\varkappa\lambda\mu\varrho\sigma$ eine eigentliche oder uneigentliche Permutation der Indices 0, 1, ... 7 ist.

Nach Formel (10.) § 5 und (9.) § 8 ist

$$(3.)\qquad \sum_\lambda f_{\alpha\beta\gamma\lambda} f_{\alpha\beta'\gamma'\lambda} G_{a\lambda} = 2\sqrt{x_{\beta\gamma} x_{\gamma a} x_{a\beta} x_{\beta'\gamma'} x_{\gamma' a} x_{a\beta'}}.$$

Folglich ist nach Formel (13.) § 2

$$f_{0125} f_{0345}(G_{05} - G_{07}) + f_{0126} f_{0346}(G_{06} - G_{07}) = 2\sqrt{x_{01} x_{02} x_{03} x_{04} x_{12} x_{34}}.$$

Vertauscht man die Indices 2 und 3 und eliminirt dann $G_{05} - G_{07}$, so erhält man mit Hülfe der Relationen (18.) § 2, (7.) § 3 und (6.) § 5

$$(4.)\qquad \sqrt{f}(G_{06} - G_{07}) = 2\sqrt{x_{01} x_{02} x_{03} x_{04} x_{05} x_{67}}.$$

Aus der Gleichung (12.) § 10 folgt

$$\sqrt{f}(f_{0123} G_{04} + G_{0123}) = 2\varepsilon' f_{1234}\sqrt{x_{01} x_{02} x_{03} x_{45} x_{46} x_{47}},$$

wo $\varepsilon' = \pm 1$ ist. Vertauscht man 4 mit 5 und subtrahirt die neue Gleichung von der ursprünglichen, so erhält man nach Formel (4.)

$$f_{1230}\sqrt{x_{06} x_{07}} + \varepsilon' f_{1234}\sqrt{x_{46} x_{47}} + \varepsilon'' f_{1235}\sqrt{x_{56} x_{57}} = 0.$$

Nach Gleichung (3.) § 5 ist mithin $\varepsilon' = \varepsilon'' = +1$, und folglich ist

$$(5.) \qquad \sqrt{f}(f_{\varrho\alpha\beta\gamma} G_{\varrho\sigma} + G_{\varrho\alpha\beta\gamma}) = -2 f_{\sigma\alpha\beta\gamma} \sqrt{x_{\varrho\alpha} x_{\varrho\beta} x_{\varrho\gamma} x_{\sigma\varkappa} x_{\sigma\lambda} x_{\sigma\mu}}.$$

Durchläuft aber $x_{\varkappa\lambda}$ eins der 5040 Systeme von sechs Doppeltangenten, die ich in § 9 untersucht habe, so lässt sich $2\Pi\sqrt{x_{\varkappa\lambda}}$ nicht aus zwei, sondern nur aus drei der Functionen G_a zusammensetzen, und zwar auf drei verschiedene Arten, z. B. ist nach Formel (10.) § 5 und (9.) § 8

$$(6.) \qquad 2\sqrt{x_{\varkappa\alpha} x_{\varkappa\beta} x_{\varkappa\gamma} x_{\varkappa\delta} x_{\alpha\beta} x_{\gamma\delta}} = \sum_{\lambda} f_{\varkappa\alpha\beta\lambda} G_{\varkappa\gamma\delta\lambda} = \sum_{\lambda} f_{\varkappa\gamma\delta\lambda} G_{\varkappa\alpha\beta\lambda} = \sum_{\lambda} f_{\varkappa\alpha\beta\lambda} f_{\varkappa\gamma\delta\lambda} G_{\varkappa\lambda}.$$

Bedient man sich der Bezeichnung (7.) § 5, so ist nach Formel (16.) § 2

$$\sum_{\lambda} u_{45\lambda} u_{67\lambda} = 0$$

und mithin (D. § 8, (7.))

$$\sum_{\lambda} \sqrt{x_{\lambda 4} x_{\lambda 5} x_{\lambda 6} x_{\lambda 7}} = 0.$$

Setzt man

$$(7.) \qquad \sqrt{f}\, X_a = 2\Pi \sqrt{x_{a\lambda}},$$

wo λ die sieben von α verschiedenen Indices durchläuft, so kann man diese Gleichung auf die Form bringen

$$(8.) \qquad X_0\sqrt{x_{23} x_{31} x_{12}} + X_1\sqrt{x_{02} x_{03} x_{23}} + X_2\sqrt{x_{03} x_{01} x_{31}} + X_3\sqrt{x_{01} x_{02} x_{12}} = 0$$

oder

$$-X_0 u_{123} + X_1 u_{023} + X_2 u_{031} + X_3 u_{012} = 0.$$

In dem System

$$\begin{array}{ccccc} 0 & u^0 & u' & u'' & u''' \\ X_0 & a_0^0 & a_0' & a_0'' & a_0''' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_7 & a_7^0 & a_7' & a_7'' & a_7''' \end{array}$$

verschwinden folglich alle Determinanten fünften Grades, welche die erste Zeile enthalten, und mithin überhaupt alle Determinanten fünften Grades. Folglich lassen sich vier Grössen $X^{(\nu)}$ so bestimmen, dass

$$(9.) \qquad X_\lambda = \sum_{\nu}{}_0^3 a_\lambda^{(\nu)} X^{(\nu)}, \quad \sum_{\nu}{}_0^3 u^{(\nu)} X^{(\nu)} = 0$$

wird.

Nun folgt aus Gleichung (4.)

$$\sqrt{x_{\beta\gamma}} X_a + \sqrt{x_{\gamma a}}(\sqrt{x_{a\beta}} G_{a\beta}) + \sqrt{x_{a\beta}}(\sqrt{x_{a\gamma}} G_{a\gamma}) = 0,$$

oder nach Formel (8.) § 5

$$\begin{vmatrix} X_\alpha & \sqrt{x_{\alpha\beta}}\,G_{\alpha\beta} & \sqrt{x_{\alpha\gamma}}\,G_{\alpha\gamma} \\ p_\alpha & p_\beta & p_\gamma \\ q_\alpha & q_\beta & q_\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Daher lassen sich zwei Grössen P_α und Q_α so bestimmen, dass die Gleichungen

$$X_\alpha = P_\alpha p_\alpha + Q_\alpha q_\alpha, \quad \sqrt{x_{\alpha\beta}}\,G_{\alpha\beta} = P_\alpha p_\beta + Q_\alpha q_\beta$$

bestehen, die zweite für jeden von α verschiedenen Index β. Da aber $\sqrt{x_{\alpha\beta}}\,G_{\alpha\beta}$ ungeändert bleibt, wenn man α mit β vertauscht, so ergiebt sich leicht, dass sich drei von den Indices 0, 1, ... 7 unabhängige Grössen A, B, C so bestimmen lassen, dass $P_\alpha = Ap_\alpha + Bq_\alpha$, $Q_\alpha = Bp_\alpha + Cq_\alpha$ wird. Mithin ist

$$X_\alpha = Ap_\alpha^2 + 2Bp_\alpha q_\alpha + Cq_\alpha^2 \quad \text{und} \quad \sqrt{x_{\alpha\beta}}\,G_{\alpha\beta} = Ap_\alpha p_\beta + B(p_\alpha q_\beta + q_\alpha p_\beta) + Cq_\alpha q_\beta.$$

Nun bleiben aber die Formeln (8.) § 5, durch welche die Grössen p_α, q_α definirt sind, ungeändert, wenn man diese Grössen durch $ap_\alpha + bq_\alpha$, $cp_\alpha + dq_\alpha$ ersetzt, wo $ad - bc = 1$ ist. Daher kann man diese Grössen so wählen, dass die eben entwickelten Gleichungen die Form

$$(10.) \quad X_\alpha = 2\sqrt{G}\,p_\alpha q_\alpha, \quad \sqrt{x_{\alpha\beta}}\,G_{\alpha\beta} = \sqrt{G}(p_\alpha q_\beta + q_\alpha p_\beta).$$

annehmen. Mithin ist

$$(11.) \quad \frac{G_{\alpha\beta}}{\sqrt{G}} = \frac{p_\alpha q_\beta + q_\alpha p_\beta}{p_\alpha q_\beta - p_\alpha q_\beta}.$$

Aus der Identität

$$(p_\alpha q_\beta + q_\alpha p_\beta)^2 = (p_\alpha q_\beta - q_\alpha p_\beta)^2 + 4p_\alpha q_\alpha p_\beta q_\beta$$

folgt

$$(12.) \quad G = G_{\alpha\beta}^2 - \frac{X_\alpha X_\beta}{x_{\alpha\beta}}.$$

Ferner besteht die identische Gleichung

$$\prod_0\left(\frac{p_0 q_\lambda + q_0 p_\lambda}{p_0 q_\lambda - q_0 p_\lambda}\right) + \prod_1\left(\frac{p_1 q_\lambda + q_1 p_\lambda}{p_1 q_\lambda - q_1 p_\lambda}\right) + \cdots + \prod_{n-1}\left(\frac{p_{n-1} q_\lambda + q_{n-1} p_\lambda}{p_{n-1} q_\lambda - q_{n-1} p_\lambda}\right) = 0 \text{ oder } 1,$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. In dem mit $\prod_\alpha$ bezeichneten Producte sind für λ alle Werthe von 0 bis $n-1$ zu setzen mit Ausschluss von α. Demnach ist

$$(13.) \quad G_{\alpha\beta} + G_{\beta\alpha} = 0, \; G_{\alpha\beta}G_{\alpha\gamma}G_{\alpha\delta} + G_{\beta\alpha}G_{\beta\gamma}G_{\beta\delta} + G_{\gamma\alpha}G_{\gamma\beta}G_{\gamma\delta} + G_{\delta\alpha}G_{\delta\beta}G_{\delta\gamma} = 0, \text{ u. s. w.},$$

dagegen

$$(14.)\quad \begin{cases} G_{\alpha\beta}G_{\alpha\gamma}+G_{\beta\alpha}G_{\beta\gamma}+G_{\gamma\alpha}G_{\gamma\beta} = G, \\ G_{\alpha\beta}G_{\alpha\gamma}G_{\alpha\delta}G_{\alpha\varepsilon}+\cdots+G_{\varepsilon\alpha}G_{\varepsilon\beta}G_{\varepsilon\gamma}G_{\varepsilon\delta} = G^2, \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ersetzt man in der Gleichung $G_{01}G_{02}+G_{10}G_{12}+G_{20}G_{21}=G$ nach § 6 $x_{\alpha\beta}$ durch $x'_{\alpha\beta}$, so erkennt man, dass $G'=G$ ist. Macht man dieselbe Uebertragung in dem Ausdrucke $G_{01}G_{04}+G_{10}G_{14}+G_{40}G_{41}=G$, so erhält man

$$(15.)\quad G_{\varkappa\alpha\beta\gamma}G_{\lambda\alpha\beta\gamma}+G_{\varkappa\lambda}(f_{\varkappa\alpha\beta\gamma}G_{\lambda\alpha\beta\gamma}-f_{\lambda\alpha\beta\gamma}G_{\varkappa\alpha\beta\gamma}) = f_{\varkappa\alpha\beta\gamma}f_{\lambda\alpha\beta\gamma}G.$$

Dass die durch die Formeln (14.) und (15.) bestimmte ganze Function sechsten Grades G von den Indices unabhängig ist, gilt natürlich nur unter der Bedingung $F=0$.

§ 12.

Relationen zwischen den Covarianten G_a und den Differentialen der Wurzelfunctionen.

Setzt man, falls x ein beliebiger Punkt ist und die Quadratwurzeln willkürlich gewählt werden,

$$\sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}}+\sqrt{x_{\varkappa\mu}x_{\nu\lambda}}+\sqrt{x_{\varkappa\nu}x_{\lambda\mu}} = P,$$
$$\sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}}-\sqrt{x_{\varkappa\mu}x_{\nu\lambda}}-\sqrt{x_{\varkappa\nu}x_{\lambda\mu}} = P', \quad \text{u. s. w.},$$

so ist

$$f^2_{\varkappa\lambda\mu\nu}F = PP'P''P'''$$

und folglich

$$f^2_{\varkappa\lambda\mu\nu}\delta F = P'P''P'''\delta P+PP''P'''\delta P'+\cdots.$$

Liegt nun der Punkt x auf der Curve $F=0$, der Punkt $x+\delta x$ aber nicht, so ist $P=0$, $P'=2\sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}}$, u. s. w. und folglich

$$(1.)\quad f^2_{\varkappa\lambda\mu\nu}\delta F = 8\sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}x_{\varkappa\mu}x_{\nu\lambda}x_{\varkappa\nu}x_{\lambda\mu}}\,\delta(\sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}}+\sqrt{x_{\varkappa\mu}x_{\nu\lambda}}+\sqrt{x_{\varkappa\nu}x_{\lambda\mu}}).$$

Nun ist, wenn x ein beliebiger Punkt ist,

$$\tfrac{1}{4}mf^2_{\varkappa\lambda\mu\nu}G_{\varkappa\lambda\mu\nu} = \sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}x_{\varkappa\mu}x_{\nu\lambda}x_{\varkappa\nu}x_{\lambda\mu}}\,\frac{\partial(\sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}},\sqrt{x_{\varkappa\mu}x_{\nu\lambda}},\sqrt{x_{\varkappa\nu}x_{\lambda\mu}})}{\partial(x',x'',x''')}.$$

Multiplicirt man die Functionaldeterminante mit der Determinante $(x, dx, \delta x)$, wo d und δ Differentiale nach verschiedenen Richtungen sind, so erhält man

$$\frac{mf^2_{\varkappa\lambda\mu\nu}G_{\varkappa\lambda\mu\nu}(x,dx,\delta x)}{4\sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}x_{\varkappa\mu}x_{\nu\lambda}x_{\varkappa\nu}x_{\lambda\mu}}} = \begin{vmatrix} \sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}} & \sqrt{x_{\varkappa\mu}x_{\nu\lambda}} & \sqrt{x_{\varkappa\nu}x_{\lambda\mu}} \\ d\sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}} & d\sqrt{x_{\varkappa\mu}x_{\nu\lambda}} & d\sqrt{x_{\varkappa\nu}x_{\lambda\mu}} \\ \delta\sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}} & \delta\sqrt{x_{\varkappa\mu}x_{\nu\lambda}} & \delta\sqrt{x_{\varkappa\nu}x_{\lambda\mu}} \end{vmatrix}.$$

Ist jetzt x ein Punkt auf der Curve $F=0$ und $x+dx$ der unendlich nahe Punkt auf derselben, so ist das Differential

$$(2.) \qquad \frac{2m(x, dx, \delta x)}{\delta F} = \Delta$$

von den (willkürlichen) Grössen $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta x'''$ unabhängig. Addirt man dann in der obigen Determinante zu den Elementen der letzten Colonne die der beiden ersten, so erhält man nach Formel (1.)

$$(3.) \qquad G_{\varkappa\lambda\mu\nu}(x)\Delta = \sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}}\,d\sqrt{x_{\varkappa\mu}x_{\nu\lambda}} - \sqrt{x_{\varkappa\mu}x_{\nu\lambda}}\,d\sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\mu\nu}},$$

z. B. ist

$$G'_{1234}(x)\Delta = \sqrt{x'_{12}x'_{34}}\,d\sqrt{x'_{13}x'_{42}} - \sqrt{x'_{13}x'_{42}}\,d\sqrt{x'_{12}x'_{34}},$$

und folglich

$$f_{0423}G_{04}\Delta = \sqrt{x_{02}x_{42}}\,d\sqrt{x_{03}x_{43}} - \sqrt{x_{03}x_{43}}\,d\sqrt{x_{02}x_{42}}.$$

Ebenso ist allgemein

$$(4.) \qquad f_{\alpha\beta\varkappa\lambda}G_{\alpha\beta}\Delta = \sqrt{x_{\alpha\varkappa}x_{\beta\varkappa}}\,d\sqrt{x_{\alpha\lambda}x_{\beta\lambda}} - \sqrt{x_{\alpha\lambda}x_{\beta\lambda}}\,d\sqrt{x_{\alpha\varkappa}x_{\beta\varkappa}}.$$

Diesen Formeln zufolge wird die Curve vierter Ordnung in jedem ihrer Schnittpunkte mit der Curve $G_a=0$ von einem Kegelschnitt vierpunktig berührt, der sie ausserdem noch in zwei Punkten einfach berührt (*Steiner*, l. c. IV; *Hesse*, dieses Journal Bd. 49, S. 263).

Aus der Gleichung (4.) folgt

$$f_{\alpha\beta\varkappa\lambda}x_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}\Delta = u_{\alpha\beta\varkappa}du_{\alpha\beta\lambda} - u_{\alpha\beta\lambda}du_{\alpha\beta\varkappa}.$$

Dieser Ausdruck ist aber identisch gleich $f_{\alpha\beta\varkappa\lambda}(u, du, a_\alpha, a_\beta)$, und mithin ist

$$(5.) \qquad x_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}\Delta = (u, du, a_\alpha, a_\beta).$$

Nach Formel (10.) § 11 ist

$$(6.) \qquad x_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} = \sqrt{G}(p_\alpha^2 q_\beta^2 - q_\alpha^2 p_\beta^2).$$

Entwickelt man daher die Determinante (9.) § 5 nach den Elementen der zweiten Colonne, so erhält man

$$X_\alpha x_{\beta\gamma}G_{\beta\gamma} + X_\beta x_{\gamma\alpha}G_{\gamma\alpha} + X_\gamma x_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} = 2G\sqrt{x_{\beta\gamma}x_{\gamma\alpha}x_{\alpha\beta}}$$

und folglich

$$\begin{aligned}&(\sum_\nu a_\alpha^{(\nu)}X^{(\nu)})(u, du, a_\beta, a_\gamma) + (\sum_\nu a_\beta^{(\nu)}X^{(\nu)})(u, du, a_\gamma, a_\alpha)\\ &+ (\sum_\nu a_\gamma^{(\nu)}X^{(\nu)})(u, du, a_\alpha, a_\beta) = 2\Delta.G(u, a_\alpha, a_\beta, a_\gamma).\end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist aber identisch gleich

$$-(\sum_\nu X^{(\nu)} u^{(\nu)})(du, a_\alpha, a_\beta, a_\gamma)+(\sum_\nu X^{(\nu)} du^{(\nu)})(u, a_\alpha, a_\beta, a_\gamma),$$

und mithin ist nach Formel (9.) § 11

$$(7.) \qquad 2G\Delta = \sum_\nu X^{(\nu)} du^{(\nu)} = -\sum_\nu u^{(\nu)} dX^{(\nu)}.$$

Nach Gleichung (3.) ist

$$G_{540\lambda}\Delta = -\sqrt{x_{45}x_{0\lambda}}\, d\sqrt{x_{05}x_{4\lambda}}+\sqrt{x_{05}x_{4\lambda}}\, d\sqrt{x_{45}x_{0\lambda}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $f_{123\lambda}$ und summirt nach λ von 0 bis 7, so erhält man nach Formel (1.) § 11 und (3.) § 5

$$2\sqrt{x_{54}x_{40}x_{05}x_{23}x_{31}x_{12}}\,\Delta = -\sqrt{x_{45}x_{05}}\sum_\lambda f_{123\lambda}(\sqrt{x_{0\lambda}}\, d\sqrt{x_{4\lambda}}-\sqrt{x_{4\lambda}}\, d\sqrt{x_{0\lambda}})$$

oder

$$\sqrt{x_{23}x_{31}x_{12}x_{04}}\,\Delta = \sum_\lambda f_{123\lambda}\sqrt{x_{4\lambda}}\, d\sqrt{x_{0\lambda}}$$

und allgemein

$$(8.) \qquad \sqrt{x_{\sigma\tau}x_{\tau\varrho}x_{\varrho\sigma}x_{\alpha\beta}}\,\Delta = \sum_\lambda f_{\lambda\varrho\sigma\tau}\sqrt{x_{\alpha\lambda}}\, d\sqrt{x_{\beta\lambda}}.$$

Ersetzt man $x_{\alpha\beta}$ durch $x'_{\alpha\beta}$, so erhält man

$$f_{0567}\sqrt{x_{01}x_{02}x_{03}x_{04}}\,\Delta = \sqrt{f}(\sqrt{x_{67}}\, d\sqrt{x_{05}}+\sqrt{x_{75}}\, d\sqrt{x_{06}}+\sqrt{x_{56}}\, d\sqrt{x_{07}})$$

und allgemein

$$(9.) \qquad f_{\varkappa\lambda\mu\nu}\sqrt{x_{\varkappa\alpha}x_{\varkappa\beta}x_{\varkappa\gamma}x_{\varkappa\delta}}\,\Delta = \sqrt{f}(\sqrt{x_{\mu\nu}}\, d\sqrt{x_{\varkappa\lambda}}+\sqrt{x_{\nu\lambda}}\, d\sqrt{x_{\varkappa\mu}}+\sqrt{x_{\lambda\mu}}\, d\sqrt{x_{\varkappa\nu}}).$$

Multiplicirt man mit $2\sqrt{x_{\varkappa\lambda}x_{\varkappa\mu}x_{\varkappa\nu}}$, so erhält man

$$-f_{\varkappa\lambda\mu\nu}X_\varkappa\Delta = u_{\varkappa\mu\nu}dx_{\varkappa\lambda}+u_{\varkappa\nu\lambda}dx_{\varkappa\mu}+u_{\varkappa\lambda\mu}dx_{\varkappa\nu},$$

also nach (9.) § 11, (10.) § 1 und (3.) § 3

$$(\sum_\nu a_\varkappa^{(\nu)} X^{(\nu)})\Delta = \sum_{\mu,\nu} u^{(\mu)} a_\varkappa^{(\nu)} dx^{\mu,\nu},$$

und da diese Gleichung für alle Werthe von $\varkappa$ gilt,

$$(10.) \qquad \Delta = \frac{\sum_\mu u^{(\mu)} dx^{\mu,\nu}}{X^{(\nu)}} = \frac{-\sum_\mu x^{\mu,\nu} du^{(\mu)}}{X^{(\nu)}} = \frac{G(dx; u, v)}{\sum X^{(\nu)} v^{(\nu)}} = \frac{-G(x; du, v)}{\sum X^{(\nu)} v^{(\nu)}}.$$

Daraus *) folgt

$$(\sum_\nu X^{(\nu)} du^{(\nu)})\Delta = \sum_{\mu,\nu} u^{(\mu)} du^{(\nu)} dx^{(\mu,\nu)} = -\sum_\mu x^{\mu,\nu} du^{(\mu)} du^{(\nu)},$$

---

*) Nach Formel (10.) ist Δ mit dem Differential identisch, welches Herr ***Schottky*** (l. c. § 17, S. 102) mit $R^{-\frac{3}{5}}\Delta$ bezeichnet. Die Grössen x', x'', x''' sind gleich den Producten aus $R^{-\frac{1}{5}}$ in die Ausdrücke, die er H, $\bar{H}$, $\bar{\bar{H}}$ nennt, und es ist $X_0 = R^{\frac{1}{5}}$.

und mithin ist nach (7.)

$$2G\Delta^2 = \sum_{\mu,\nu} u^{(\mu)} du^{(\nu)} dx^{\mu,\nu}.$$

Nun ist aber nach (10.) § 5 in der Determinante vierten Grades $|x^{\mu,\nu}| = F = 0$ die dem Elemente $x^{\mu,\nu}$ entsprechende Unterdeterminante gleich $2u^{(\mu)}u^{(\nu)}$. Mithin ist

$$dF = 2\sum_{\mu,\nu} u^{(\mu)} u^{(\nu)} dx^{\mu,\nu},$$

falls $F = 0$ ist, und

$$d^2F = 4\sum_{\mu,\nu} u^{(\mu)} du^{(\nu)} dx^{(\mu,\nu)},$$

falls auch $dF = 0$ ist. Daher ist $8G\Delta^2 = d^2F$ oder, weil $F = dF = 0$ ist,

$$-288G.m^2(x, dx, \delta x)^2 = \begin{vmatrix} 12F & 3dF & 3\delta F \\ 3dF & d^2F & d\delta F \\ 3\delta F & \delta dF & \delta^2 F \end{vmatrix}$$

und folglich

$$(11.) \qquad -288m^2 G(x) = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^{(\mu)} \partial x^{(\nu)}} \right| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3).$$

Nach Formel (8.) ist

$$(u, a_\varrho, a_\sigma, a_\tau)\sqrt{x_{\alpha\beta}}\,\Delta = \sum_\lambda (a_\lambda, a_\varrho, a_\sigma, a_\tau)\sqrt{x_{\alpha\lambda}}\, d\sqrt{x_{\beta\lambda}}$$

und mithin auch, wenn z ein willkürlicher Punkt ist,

$$(\sum_\nu u^{(\nu)} z^{(\nu)})\sqrt{x_{\alpha\beta}}\,\Delta = \sum_\lambda z_\lambda \sqrt{x_{\alpha\lambda}}\, d\sqrt{x_{\beta\lambda}}$$

oder

$$(\sum_\nu u^{(\nu)} z^{(\nu)})(p_\alpha q_\beta - q_\alpha p_\beta)\Delta = \sum_\lambda z_\lambda (p_\alpha q_\lambda - q_\alpha p_\lambda)(p_\beta dq_\lambda - q_\beta dp_\lambda),$$

weil

$$\sum_\lambda z_\lambda g(p_\lambda, q_\lambda) = 0$$

ist, falls g eine beliebige quadratische Function ist (D. § 8). Vertauscht man α und β und zieht die neue Gleichung von der ursprünglichen ab, so erhält man

$$(12.) \qquad (\sum_\nu u^{(\nu)} z^{(\nu)})\Delta = \sum_\lambda z_\lambda q_\lambda dp_\lambda = -\sum_\lambda z_\lambda p_\lambda dq_\lambda.$$

Aus der Gleichung (7.) folgt

$$-2f_{\alpha\beta\gamma\delta} G\Delta = u_{\beta\gamma\delta} dX_\alpha + u_{\alpha\delta\gamma} dX_\beta + u_{\alpha\beta\delta} dX_\gamma + u_{\alpha\gamma\beta} dX_\delta,$$

und mithin ist nach (9.) § 5 und (10.) § 11

$$(13.) \qquad f_{\alpha\beta\gamma\delta}\sqrt{G}\,\Delta = |d(p_\lambda q_\lambda),\ p_\lambda^2,\ p_\lambda q_\lambda,\ q_\lambda^2| \qquad (\lambda = \alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

Ferner ist identisch

$$(u, du, a_\alpha, a_\beta)(du, a_\alpha, a_\gamma, a_\delta)+(u, du, a_\alpha, a_\gamma)(du, a_\alpha, a_\delta, a_\beta)$$
$$+(u, du, a_\alpha, a_\delta)(du, a_\alpha, a_\beta, a_\gamma) = 0$$

und daher

$$x_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}d\sqrt{x_{\alpha\gamma}x_{\alpha\delta}x_{\gamma\delta}}+x_{\alpha\gamma}G_{\alpha\gamma}d\sqrt{x_{\alpha\delta}x_{\alpha\beta}x_{\delta\beta}}+x_{\alpha\delta}G_{\alpha\delta}d\sqrt{x_{\alpha\beta}x_{\alpha\gamma}x_{\beta\gamma}} = 0.$$

Ebenso zeigt man, dass auch

$$x_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}\sqrt{x_{\alpha\gamma}x_{\alpha\delta}x_{\gamma\delta}}+x_{\alpha\gamma}G_{\alpha\gamma}\sqrt{x_{\alpha\delta}x_{\alpha\beta}x_{\delta\beta}}+x_{\alpha\delta}G_{\alpha\delta}\sqrt{x_{\alpha\beta}x_{\alpha\gamma}x_{\beta\gamma}} = 0$$

oder einfacher

$$(14.)\qquad G_{\alpha\beta}\sqrt{x_{\alpha\beta}x_{\gamma\delta}}+G_{\alpha\gamma}\sqrt{x_{\alpha\gamma}x_{\delta\beta}}+G_{\alpha\delta}\sqrt{x_{\alpha\delta}x_{\beta\gamma}} = 0$$

ist. Mithin ist auch

$$\sqrt{x_{\alpha\gamma}x_{\alpha\delta}x_{\gamma\delta}}\,d\Big(\frac{x_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}}{\sqrt{G}}\Big)+\sqrt{x_{\alpha\delta}x_{\alpha\beta}x_{\delta\beta}}\,d\Big(\frac{x_{\alpha\gamma}G_{\alpha\gamma}}{\sqrt{G}}\Big)+\sqrt{x_{\alpha\beta}x_{\alpha\gamma}x_{\beta\gamma}}\,d\Big(\frac{x_{\alpha\delta}G_{\alpha\delta}}{\sqrt{G}}\Big) = 0,$$

also nach (9.) § 5 und (6.)

$$|p_\alpha^2 d(q_\lambda^2)-q_\alpha^2 d(p_\lambda^2),\ p_\lambda^2,\ p_\lambda q_\lambda,\ q_\lambda^2| = 0 \qquad (\lambda=\alpha,\beta,\gamma,\delta).$$

Da hier für α auch β, γ, δ gesetzt werden darf, so zerfällt diese Gleichung in die zwei Gleichungen

$$(15.)\qquad \begin{cases} |d(p_\lambda^2),\ p_\lambda^2,\ p_\lambda q_\lambda,\ q_\lambda^2| = 0, \\ |d(q_\lambda^2),\ p_\lambda^2,\ p_\lambda q_\lambda,\ q_\lambda^2| = 0. \end{cases} \qquad (\lambda=\alpha,\beta,\gamma,\delta).$$

§ 13.

Ueber eine Klasse von Covarianten vierten Grades.

Nach Formel (5.) oder (6.) § 12 ist der Ausdruck

$$x_{01}x_{23}G_{01}G_{23}+x_{02}x_{31}G_{02}G_{31}+x_{03}x_{12}G_{03}G_{12}$$

durch F theilbar. Der Quotient $\Phi(x)$ ist eine ganze Function vierten Grades von x. Da $G_{\alpha\beta}$ verschwindet, wenn $x_{\alpha\gamma}=x_{\beta\gamma}=0$ ist, so ist $\Phi=0$, wenn irgend zwei der sechs Functionen $x_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$ verschwinden, mit Ausnahme von x_{01} und x_{23}, x_{02} und x_{31}, x_{03} und x_{12}. Daher lässt sich diese Function auf die Form

$$\Phi = p\,x_{02}x_{31}x_{03}x_{12}+q\,x_{03}x_{12}x_{01}x_{23}+r\,x_{01}x_{23}x_{02}x_{31}$$

bringen. Sei zur Abkürzung

$$(1.)\qquad f^2 p_{01,23} = \Pi_5^7 f_{014\lambda}f_{234\lambda},\quad f^2 p_{02,31} = \Pi_5^7 f_{024\lambda}f_{314\lambda},\quad f^2 p_{03,12} = \Pi_5^7 f_{034\lambda}f_{124\lambda},$$

wo der Index 4 nur scheinbar bevorzugt ist. Setzt man dann $x_{01} = x_{23} = 0$, so ist nach Formel (7.) § 4

$$G_{02} = G_{13} = m f_{0123} p_{01,23} x_{03} x_{12},$$
$$G_{03} = G_{12} = m f_{0123} p_{01,23} x_{02} x_{13}$$

und folglich

$$pF = m^2 f_{0123}^2 p_{01,23}^2 (x_{02} x_{13} - x_{03} x_{12}),$$

also da

$$f_{0123}^2 F = (x_{01} x_{23} + x_{02} x_{31} - x_{03} x_{12})^2 - 4 x_{01} x_{23} x_{02} x_{31}$$

und $x_{01} = 0$ ist,

$$p(x_{02} x_{13} - x_{03} x_{12}) = m^2 f_{0123}^4 p_{01,23}^2.$$

Aus der Gleichung

$$f_{0145} x \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3 \\ 0\,1\,2\,3 \end{pmatrix} = f_{0123} x \begin{pmatrix} 0\,1\,4\,5 \\ 0\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$$

folgt, wenn $x_{01} = x_{23} = 0$ ist,

$$f_{0145}(x_{02} x_{13} - x_{03} x_{12}) = f_{0123}(x_{04} x_{15} - x_{05} x_{14}).$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} x_{04} x_{15} - x_{05} x_{14} &= [04, 01, 23][15, 10, 23] - [05, 01, 23][14, 10, 23] \\ &= m^2 f_{0123}^3 f_{0145} p_{01,23} \end{aligned}$$

und folglich

$$x_{02} x_{13} - x_{03} x_{12} = m^2 f_{0123}^4 p_{01,23}.$$

Mithin ist $p = p_{01,23}$ und daher

$$(2.) \quad \begin{cases} (x_{01} x_{23} G_{01} G_{23} + x_{02} x_{31} G_{02} G_{31} + x_{03} x_{12} G_{03} G_{12}) \\ = F(x)(p_{01,23} x_{02} x_{31} x_{03} x_{12} + p_{02,31} x_{03} x_{12} x_{01} x_{23} + p_{03,12} x_{01} x_{23} x_{02} x_{31}). \end{cases}$$

Setzt man

$$T_{\alpha\alpha} = F, \quad T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha} = x_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta},$$

so ist nach Gleichung (12.) § 8 $\sum_\lambda T_{\alpha\lambda} z_\lambda = 0$, und folglich lassen sich (vgl. D. § 7) die Grössen $T_\alpha^{(\nu)}$ so bestimmen, dass $T_{\alpha\beta} = \sum_\nu^3{}_0 T_\alpha^{(\nu)} a_\beta^{(\nu)}$ wird. Aus der Gleichung (16.) § 2 ergiebt sich daher $\sum_\lambda T_{\alpha\lambda} T_{\beta\lambda} = 0$ oder

$$(3.) \quad \sum_\lambda x_{\alpha\lambda} G_{\alpha\lambda} x_{\lambda\beta} G_{\lambda\beta} = e_{\alpha\beta} F^2.$$

Die Grössen $x_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$ bilden also ein alternirendes orthogonales System, für welches die Summe der Quadrate der Elemente jeder Reihe gleich $-F^2$

ist. Folglich ist

$$|x_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}| = |x_{\varkappa\lambda} G_{\varkappa\lambda}| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3;\ \varkappa, \lambda = 4, 5, 6, 7),$$

also wenn man die Quadratwurzel auszieht:

$$(4.) \quad \begin{cases} & x_{01}x_{23}G_{01}G_{23} + x_{02}x_{31}G_{02}G_{31} + x_{03}x_{12}G_{03}G_{12} \\ = & x_{45}x_{67}G_{45}G_{67} + x_{46}x_{75}G_{46}G_{75} + x_{47}x_{56}G_{47}G_{56}. \end{cases}$$

Den Beweis dafür, dass das Vorzeichen richtig bestimmt ist, will ich hier übergehen. Mithin ist auch

$$\Phi = p_{45,67}x_{46}x_{75}x_{47}x_{56} + p_{46,75}x_{47}x_{56}x_{45}x_{67} + p_{47,56}x_{45}x_{67}x_{46}x_{75},$$

wo

$$f^2 p_{45,67} = \Pi_1^3 f_{450\lambda} f_{670\lambda}$$

u. s. w. ist.

Die Curve vierter Ordnung $\Phi = 0$ geht also nicht nur durch zwölf Schnittpunkte der sechs Geraden $a_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$, sondern auch durch zwölf Schnittpunkte der sechs Geraden $a_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 4, 5, 6, 7)$. Auszuschliessen sind von den bezeichneten Schnittpunkten die sechs Punkte

$$(5.) \quad (a_{01}, a_{23}),\ (a_{02}, a_{31}),\ (a_{03}, a_{12}),\ (a_{45}, a_{67}),\ (a_{46}, a_{75}),\ (a_{47}, a_{56}).$$

Dieselben liegen bekanntlich (*Steiner* l. c. II.) auf einem Kegelschnitt.

Wie ich beiläufig bemerke, ergiebt sich dieser Satz unmittelbar aus der Gleichung (9.) § 4, sowie der analoge Satz, dass die sechs Punkte

$$(6.) \quad (a_{0\lambda}, a_{1\lambda}) \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots 7)$$

auf einem Kegelschnitt liegen, aus der Gleichung (3.) § 4. Denn aus dieser Formel

$$\sum_{\lambda}^{7}{}_{2} \frac{x_{0\lambda}x_{1\lambda}y_{0\lambda}y_{1\lambda}}{f_{01\lambda}} = 0$$

folgt durch Polarenbildung

$$\Sigma \frac{(x_{0\lambda}\xi_{1\lambda} + x_{1\lambda}\xi_{0\lambda})(y_{0\lambda}\eta_{1\lambda} + y_{1\lambda}\eta_{0\lambda})}{f_{01\lambda}} = 0,$$

also, wenn man $\xi = y$ und $\eta = x$ setzt,

$$\Sigma \frac{(x_{0\lambda}y_{1\lambda} + x_{1\lambda}y_{0\lambda})^2}{f_{01\lambda}} = 0.$$

Aus dieser Gleichung und der ursprünglichen erhält man die Relation

$$\sum_{\lambda} \frac{(x_{0\lambda}y_{1\lambda} - x_{1\lambda}y_{0\lambda})^2}{f_{01\lambda}} = 0,$$

welche den Beweis für die aufgestellte Behauptung enthält.

Aus der Identität

$$N(\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}) = -4(yz+zx+xy)$$

ergiebt sich, dass die Curve $\Phi = 0$ in den vier Schnittpunkten der beiden Linienpaare $x_{01}x_{23} = 0$ und $x_{02}x_{31} = 0$ von dem Kegelschnitt

$$\frac{x_{01}x_{23}}{p_{01,23}} + \frac{x_{02}x_{31}}{p_{02,31}} = 0$$

berührt wird. Ein gewisses System von Berührungskegelschnitten dieser Curve gehört also dem Kegelschnittnetze

$$px_{01}x_{23} + qx_{02}x_{31} + rx_{03}x_{12} = 0$$

an, und zwar berührt ein Kegelschnitt dieses Netzes die Curve, wenn

$$N(\sqrt{pp_{01,23}} + \sqrt{qp_{02,31}} + \sqrt{rp_{03,12}} = 0$$

ist. Die beiden Curven $F = 0$ und $\Phi = 0$ haben also die Covariante G_{0123} gemeinsam. Um eine solche Curve $\Phi = 0$ zu erhalten, muss man die sechs Linienpaare (5.) einer *Steiner*schen Gruppe beliebig in zwei Systeme von drei Linienpaaren zerlegen. Demnach entsprechen jeder der 63 *Steiner*schen Gruppen zehn Curven $\Phi = 0$.

§ 14.

Die kubischen Polaren der Schnittpunkte der Doppeltangenten.

Unter den Covarianten dritten Grades, die sich in einfacher Weise durch die Functionen G_a ausdrücken lassen, befinden sich auch die kubischen Polaren der Schnittpunkte der Doppeltangenten. Aus der Gleichung (9.) § 2 folgt

$$\tfrac{1}{2}f_{0123}^2 \sum_\nu \frac{\partial F}{\partial x^{(\nu)}} y^{(\nu)} = -y_{01}x\binom{1\,2\,3}{0\,2\,3} + y_{02}x\binom{1\,2\,3}{0\,1\,3} - y_{03}x\binom{1\,2\,3}{0\,1\,2}$$
$$- y_{23}x\binom{0\,1\,3}{0\,1\,2} + y_{13}x\binom{0\,2\,3}{0\,1\,2} - y_{12}x\binom{0\,2\,3}{0\,1\,3}.$$

Bezeichnet man die Functionaldeterminante $\frac{\partial(P, Q, R)}{\partial(x', x'', x''')}$ kurz mit $[P, Q, R]$, so ergiebt sich daraus, indem man $y_{02} = y_{13} = 0$ setzt, nach Gleichung (9.) § 8

$$-\tfrac{1}{2}f_{0123}^2[F, x_{02}, x_{13}] = \sum_\lambda (f_{013\lambda}(f_{023\lambda}y_{21} + f_{012\lambda}y_{23})G_{0\lambda} + f_{123\lambda}(f_{023\lambda}y_{01} + f_{012\lambda}y_{03})G_{2\lambda}),$$

wo

$$y_{\alpha\beta} = [\alpha\beta, 02, 13]$$

ist. Nun ist aber nach (1.) § 3

$$f_{023\lambda}y_{21}+f_{012\lambda}y_{23} = f_{0123}y_{2\lambda}+f_{123\lambda}y_{20},$$
$$f_{023\lambda}y_{01}+f_{012\lambda}y_{03} = f_{0123}y_{0\lambda}+f_{013\lambda}y_{02},$$

also weil $y_{02}=0$ ist,

$$-\tfrac{1}{2}f_{0123}[F, x_{02}, x_{13}] = \sum_{\lambda}^{7}{}_4(f_{013\lambda}y_{2\lambda}G_{0\lambda}-f_{213\lambda}y_{0\lambda}G_{2\lambda}).$$

Hier ist z. B.

$$y_{04}=[04, 02, 13]=-\frac{m}{f}f_{1302}f_{1304}f_{0425}f_{0426}f_{0427},$$

$$y_{24}=[24, 20, 13]=-\frac{m}{f}f_{1320}f_{1324}f_{2405}f_{2406}f_{2407}.$$

In der Summe für $\frac{f}{2m}[F, x_{02}, x_{13}]$ ist daher das dem Index $\lambda=4$ entsprechende Glied gleich

$$f_{0134}f_{2134}f_{0245}f_{0246}f_{0247}(G_{04}-G_{24}).$$

Nun ist aber nach Formel (9.) § 8

$$\sum_{\lambda}f_{02\lambda\alpha}f_{02\lambda\beta}(G_{0\lambda}-G_{2\lambda}) = 0$$

und folglich auch

$$\sum_{\lambda}(f_{0135}f_{2135}f_{0254}f_{02\lambda6}f_{02\lambda7}+f_{0136}f_{2136}f_{0264}f_{02\lambda7}f_{02\lambda5}$$
$$+f_{0137}f_{2137}f_{0274}f_{02\lambda5}f_{02\lambda6})(G_{0\lambda}-G_{2\lambda}) = 0.$$

In dieser Summe haben die den Indices $\lambda=5, 6, 7$ entsprechenden Glieder dieselben Coefficienten, wie in der obigen Summe. Dasselbe gilt von dem Coefficienten von $G_{04}-G_{24}$, der gleich

$$-f_{0245}f_{0246}f_{0247}(f_{0135}f_{2135}+f_{0136}f_{2136}+f_{0137}f_{2137}) = f_{0134}f_{2134}f_{0245}f_{0246}f_{0247}$$

ist. Dagegen hat $G_{01}-G_{21}$ den Coefficienten

$$f_{0135}f_{2135}f_{0254}f_{0216}f_{0217}+f_{0136}f_{2136}f_{0264}f_{0217}f_{0215}+f_{0137}f_{2137}f_{0274}f_{0215}f_{0216} = -ff_{0123},$$

wie man erkennt, indem man in der Formel

$$f_{3012}f_{4012}x_{43}=f_{6012}f_{7012}x_{67}+f_{7012}f_{5012}x_{75}+f_{5012}f_{6012}x_{56}$$

$x_{40}=x_{42}=0$ setzt. Durch Vertauschung von 0 und 3 ergiebt sich ebenso, dass der Coefficient von $G_{03}-G_{23}$ gleich $+ff_{0123}$ ist. Mithin ist

$$(1.)\quad [F, x_{\alpha\gamma}, x_{\beta\delta}] = 2mf_{\alpha\beta\gamma\delta}(G_{\alpha\beta}+G_{\beta\gamma}+G_{\gamma\delta}+G_{\delta\alpha}).$$

Ersetzt man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch 0415 oder 0145 oder 0124, so ergeben sich daraus durch die oben entwickelte Uebertragungsmethode Formeln

von der Gestalt

$$(2.)\quad [F,\ x_{02},\ x_{13}] = -\frac{2m}{f} f_{4567} f_{0245} f_{0256} f_{0267} f_{0274} \left(\frac{G_{0245}}{f_{0245}} + \frac{G_{0256}}{f_{0256}} + \frac{G_{0267}}{f_{0267}} + \frac{G_{0274}}{f_{0274}}\right),$$

$$(3.)\quad [F,\ x_{02},\ x_{13}] = \frac{2m f_{0123} f_{02\alpha\beta} f_{13\alpha\beta}}{f_{03\alpha\beta} f_{12\alpha\beta}} \left(G_{01} + G_{23} + \frac{G_{02\alpha\beta}}{f_{02\alpha\beta}} - \frac{G_{13\alpha\beta}}{f_{13\alpha\beta}}\right),$$

$$(4.)\quad [F,\ x_{01},\ x_{02}] = -\frac{2m f_{012\alpha} f_{012\beta}}{f_{12\alpha\beta}} \left(\frac{G_{012\alpha}}{f_{012\alpha}} - \frac{G_{012\beta}}{f_{012\beta}} - G_{0\alpha} + G_{0\beta}\right).$$

Sind zwei beliebige Doppeltangenten gegeben, so giebt es eine ganz bestimmte ***Steiner*sche** Gruppe, in welcher sie als conjugirte Geraden auftreten. Ausserdem aber giebt es zehn ***Steiner*sche** Gruppen, in welchen sie als nicht conjugirte Geraden vorkommen. Irgend eine dieser zehn Gruppen ist mit nur einer andern syzygetisch, mit den acht übrigen aber azygetisch. Sind $[a]$ und $[a']$ syzygetisch und ebenso $[b]$ und $[b']$, so geht die kubische Polare des Schnittpunktes der beiden Doppeltangenten durch die Schnittpunkte von $G_{a,b} = 0$ und $G_{a',b'} = 0$ (und von $G_{a,b'} = 0$ und $G_{a',b} = 0$), im Ganzen also durch die Schnittpunkte von 20 Mal zwei Curven. Unter diesen Schnittpunkten befinden sich jedes Mal die vier Berührungspunkte der beiden gegebenen Doppeltangenten.

Zürich, Juni 1887.

Ueber eine Eigenschaft der Flächen, bei denen der eine Hauptkrümmungsradius eine Function des anderen ist.

(Von Herrn *J. Weingarten.*)

Die von Herrn *Lie* herrührende Bemerkung, dass für eine Fläche der in der Ueberschrift bezeichneten Gattung die Krümmungslinien durch Quadraturen bestimmbar sind, möge in Folgendem eine neue Begründung finden.

Wenn x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Fläche dargestellt als Functionen zweier unabhängigen Variablen p, q, ferner X, Y, Z die Coordinaten der Abbildung dieses Punktes auf die *Gauss*ische Kugel bezeichnen, so ist die Determinante:

$$\Delta = (Y\,dZ - Z\,dY)\,dx + (Z\,dX - X\,dZ)\,dy + (X\,dY - Y\,dX)\,dz,$$

welche, gleich Null gesetzt, die Differentialgleichung der Krümmungslinien dieser Fläche ergiebt, eine *gegebene* quadratische Differentialform der Differentiale dp, dq, welche durch Einführung von Parametern u, v der Krümmungslinien die bekannte Form:

$$\Delta = (r' - r)\sqrt{EG}\,du\,dv$$

annimmt, in der r, r' die Hauptkrümmungen im Punkte (x, y, z), E und G die Coefficienten des Quadrates des Linienelements der Fläche für die Variablen u, v bezeichnen. Bildet man das *Gauss*ische Krümmungsmass $\varkappa$ der Form Δ aus vorstehender Specialform, so ergiebt die Benutzung der bekannten Formeln für die Differentialquotienten der Logarithmen von E und G zur Bestimmung von $\varkappa$ die Gleichung:

$$\varkappa\sqrt{EG} = 2\left(\frac{\partial r'}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r'}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial u}\right)(r' - r)^{-3},$$

aus welcher folgt, dass für eine Fläche der betrachteten Gattung und *nur* für eine solche, dieses Krümmungsmass verschwindet, das heisst

$$\Delta = du\,dv$$

ist. Sind $a\,dp + b\,dq$, $a'\,dp + b'\,dq$ die gegebenen linearen Factoren der ursprünglichen Form Δ, so folgen aus der vorstehenden Gleichung die ferneren:

$$e^{\varphi}(a\,dp + b\,dq) = du, \quad e^{-\varphi}(a'\,dp + b'\,dq) = dv,$$

deren Integrabilitätsbedingungen die Differentialquotienten von φ, also φ durch Quadratur bestimmen. Nach dieser Bestimmung ergeben sich u, v durch neue Quadraturen aus den vorstehenden Gleichungen selbst. Q. e. d.

Ueber specielle *Abel*sche Functionen vierten Ranges.

(Von Herrn *F. Schottky* in Zürich.)

Es ist bekannt, dass zwischen den Ableitungen der vier Integrale erster Gattung, die zu irgend einer nicht hyperelliptischen Gleichung vom Range 4 gehören, zwei homogene Relationen bestehen, von denen die eine zweiten, die andere dritten Grades ist. Diese sind in ihren Coefficienten keinen Beschränkungen unterworfen. Wenn man aber über die quadratische Relation die besondere Annahme macht, dass die Determinante ihrer Coefficienten Null ist — geometrisch gesprochen, dass die entsprechende Fläche in einen Kegel ausartet —, so entspricht dieser Voraussetzung auch eine besondere Eigenthümlichkeit in dem zugehörigen System von Thetafunctionen. Wie Herr *Weber**) gezeigt hat, giebt es dann ein — und zwar nur ein — gerades Θ, welches gleichzeitig mit den Argumenten verschwindet. Dieser Umstand erscheint bemerkenswerth genug, um eine nähere algebraische Untersuchung des Falles zu rechtfertigen.

In einem vorangehenden Aufsatz: „Zur Theorie der *Abel*schen Functionen von vier Variabeln**) wurden Beziehungen zwischen den Wurzelfunctionen aufgestellt, die jedenfalls gültig sind, soweit solche Grössen im gewöhnlichen Sinne existiren. Wir betrachten dieses Gleichungssystem hier genauer unter der schon erwähnten Voraussetzung, dass eine gerade Thetafunction Θ_π existirt, welche selbst Null wird, wenn die Argumente gleich Null gesetzt werden. Eine solche Annahme trägt wesentlich dazu bei, die Untersuchung einfach zu gestalten. Das Problem, welches ich zu lösen gesucht habe, lässt sich so fassen: Unter den Ausdrücken

$$\sqrt{\frac{u_a u_b}{u_c u_{abc}}},$$

*) Ueber einige Ausnahmefälle in der Theorie der *Abel*schen Functionen. Math. Annalen, Bd. 13.

**) Dieses Journal, Bd. 102.

die aus den 120 Grössen $\sqrt{u_m}$ gebildet werden können, zwei auszuwählen, durch die alle übrigen rational und in übersichtlicher Form dargestellt werden. Ausserdem ist die Gleichung anzugeben, welche zwischen den beiden ausgewählten Grössen x, y besteht. Es ist offenbar, dass diese Gleichung nicht von niedrigerem Range als dem vierten sein kann; denn je zwei Quotienten $\frac{u_m}{u_p}$, $\frac{u_n}{u_p}$ gehören zu denjenigen Grössen, die sich rational durch x, y ausdrücken lassen sollen und sind, wie bekannt, durch eine Gleichung vierten Ranges verbunden.

§ 1.

Ist K das Zeichen irgend einer halben Periode, so giebt es 36 zugehörige Functionen zweiter Art oder Producte gerader Thetafunctionen $P_a = \Theta_a \Theta_{aK}$, deren Nullwerthe $c_a c_{aK}$ wir mit p_a bezeichnet haben. Ferner existiren 28 Producte ungerader Theta, also ebenso viele Wurzelfunctionen zweiten Grades $w_a = \sqrt{u_a u_{aK}}$. Zwischen je vier der letzteren besteht eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten. Wählt man drei beliebige azygetische Functionen erster Art aus und bezeichnet sie als P_1, P_2, P_3, so lassen sich diese durch Hinzufügung von vier andern: P_4, P_5, P_6, P_7 immer zu einer Hauptreihe ergänzen. Dann sind zugleich alle 64 Functionen in bestimmter Weise durch Indices bezeichnet, nämlich durch die sieben primitiven und deren ungerade Combinationen. Ist ε die höchste Combination, so sind

$$P_\varepsilon, \quad P_{456}, \quad P_{457}, \quad P_{467}, \quad P_{567} \quad \text{und} \quad P_{123}$$

die einzigen Functionen zweiter Art, welche zu je zweien der gegebenen P_1, P_2, P_3 azygetisch sind. — Nun besteht zwischen den entsprechenden Wurzelfunctionen

$$w_1, \quad w_2, \quad w_3 \quad \text{und} \quad w_{12345} = w_{\varepsilon 67}$$

die folgende Gleichung:

$$(1.) \qquad w_1\sqrt{p_{167}p_{236}p_{237}} + w_2\sqrt{p_{267}p_{316}p_{317}} + w_3\sqrt{p_{367}p_{126}p_{127}} = w_{\varepsilon 67}\sqrt{p_\varepsilon p_{456}p_{457}}\ ^*).$$

Wenn eine der drei Functionen P_ε, P_{456}, P_{457} identisch ist mit $P_\pi = \Theta_\pi \Theta_{\pi K}$, so verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung, weil dann das ent-

*) S. § 6 der citirten Arbeit.

sprechende p den Werth Null hat. Es besteht also dann zwischen w_1, w_2, w_3 allein eine lineare Relation. Dasselbe findet statt, wenn $P_\pi = P_{467}$ oder P_{567} ist, weil man ja in der Gleichung (1.) die Indices 4 und 5 mit 6 und 7 vertauschen kann. Wenn also erstens P_1, P_2, P_3 drei azygetische Functionen erster Art sind, und $\Theta_\pi \Theta_{\pi K}$ eine von P_{123} verschiedene Function zweiter Art, die zu je zweien der drei gegebenen: P_1, P_2, P_3 azygetisch ist, so sind die entsprechenden Wurzelfunctionen w_1, w_2, w_3 durch eine lineare Gleichung verbunden.

Damit also eine solche dreigliedrige Gleichung:

$$A\sqrt{u_a u_{aK}} + B\sqrt{u_b u_{bK}} + C\sqrt{u_c u_{cK}} = 0$$

angenommen werden darf, ist hiernach Folgendes nothwendig. Erstens muss die Periode K von solcher Beschaffenheit sein, dass $\Theta_{\pi K}$ ebenso wie Θ_π selbst gerade ist. Zweitens müssen die vier Grössen

$$\Theta_a, \quad \Theta_b, \quad \Theta_c, \quad \Theta_\pi$$

azygetisch sein und Θ_{abc} von Θ_π und $\Theta_{\pi K}$ verschieden. Da Θ_a, Θ_b ungerade, Θ_π dagegen eine gerade Function ist, so werden Θ_a, Θ_b, Θ_π azygetisch sein, wenn $\Theta_{ab\pi}$ eine ungerade Function ist. Θ_{abc} dagegen muss gerade sein, damit Θ_a, Θ_b, Θ_c azygetisch sind. Wir können demnach den Satz aussprechen, den wir der folgenden Untersuchung zu Grunde legen:

Zwischen den Wurzelfunctionen

$$\sqrt{u_a u_{aK}}, \quad \sqrt{u_b u_{bK}}, \quad \sqrt{u_c u_{cK}}$$

besteht eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten, wenn

πK und abc ***Indices gerader,***

πab, πac, πbc ***Indices ungerader Functionen,*** und

abc von π und πK ***verschieden ist.***

Dies sind die einfachsten Relationen; bei den viergliedrigen fällt natürlich jede derartige Beschränkung fort.

§ 2.

Wir denken uns nun für das ganze System der 256 Thetafunctionen eine Hauptreihe

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots \quad \Theta_9$$

zu Grunde gelegt; und zwar denken wir uns, was in jedem Falle möglich

ist, die neun Grössen so gewählt, dass Θ_π gerade diejenige Function wird, welche auch durch die Combination aller neun primitiven Indices bezeichnet werden kann. Es sind dann

$$\Theta_{12\pi}, \ldots \Theta_{89\pi}; \quad \Theta_{123}, \ldots \Theta_{789}$$

die 120 ungeraden Theta,

$$\sqrt{u_{12\pi}}, \ldots \sqrt{u_{89\pi}}; \quad \sqrt{u_{123}}, \ldots \sqrt{u_{789}}$$

die entsprechenden Wurzelgrössen, und

$$\Theta_\pi; \quad \Theta_1, \ldots \Theta_9; \quad \Theta_{1234\pi}, \ldots \Theta_{6789\pi}$$

die geraden Functionen, von denen die erste mit den Argumenten zugleich Null wird. Diejenigen halben Perioden, welche Θ_π in gleichfalls gerade Functionen überführen, sind

$$1\pi, \; 2\pi, \ldots 9\pi; \quad 1234, \ldots 6789.$$

Es ist leicht, Systeme anzugeben, die den Bedingungen des vorigen Paragraphen entsprechen. Auf die Coefficienten der aufzustellenden Gleichungen kommt es uns hier weniger an; die Grössen u_m können wir uns deswegen auch ersetzt denken durch andere, v_m, die sich von ihnen um beliebig gewählte constante Factoren unterscheiden.

Aus dem Satz des § 1 folgt, dass von den drei zur Periode 1π gehörigen Wurzelfunctionen

$$\text{(I.)} \qquad \sqrt{v_{129}v_{29\pi}}, \quad \sqrt{v_{139}v_{39\pi}}, \quad \sqrt{v_{149}v_{49\pi}}$$

die dritte linear-homogen durch die beiden ersten ausdrückbar sein muss. Denn schreiben wir die drei Ausdrücke in der Form:

$$\sqrt{v_a v_{aK}}, \quad \sqrt{v_b v_{bK}}, \quad \sqrt{v_c v_{cK}}$$

wo:

$$a = 129, \quad b = 139, \quad c = 149, \quad K = 1\pi$$

ist, so folgt:

$$\pi K = 1; \quad abc = 12349 = 5678\pi; \quad ab\pi = 23\pi, \quad bc\pi = 24\pi, \quad ca\pi = 43\pi.$$

Es sind also πK und abc Indices gerader Functionen, abc von π und πK verschieden; $\Theta_{ab\pi}$, $\Theta_{bc\pi}$, $\Theta_{ca\pi}$ sind ungerade. Somit sind alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt.

Wir bevorzugen jetzt den Index 9 vor den übrigen und setzen zur Abkürzung:

$$\text{(1.)} \qquad v_{\alpha 9\pi} = s_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 8),$$

$$\text{(2.)} \qquad \sqrt{s_\alpha}\sqrt{s_\beta}\sqrt{v_{\alpha\beta 9}} = F_{\alpha\beta} \qquad \left(\begin{smallmatrix} \alpha, \beta = 1, 2, \ldots 8 \\ \alpha \gtrless \beta \end{smallmatrix}\right).$$

Die Vorzeichen der einzelnen Wurzelgrössen können willkürlich gewählt sein. Es lässt sich dann, dem System (I.) zufolge, F_{14} linear und homogen durch F_{12}, F_{13} ausdrücken.

Nimmt man aber hinzu, dass man die Indices 1 bis 8 beliebig vertauschen kann, so folgt, dass alle 28 Grössen $F_{\alpha\beta}$ durch drei unter ihnen, z. B. F_{12}, F_{13}, F_{23}, linear-homogen ausdrückbar sind. Da es nur auf die Quotienten der u ankommt, können wir $F_{23} = 1$ setzen; F_{12} und F_{13} sind dann Hülfsgrössen x, y von der Anfangs angegebenen Art. Um aber die Symmetrie nicht zu stören, verstehen wir unter x, y, z irgend drei lineare homogene Functionen von F_{12}, F_{13}, F_{23} mit nicht verschwindender Determinante; wir können dann allgemein ansetzen:

$$(3.) \qquad F_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}x + b_{\alpha\beta}y + c_{\alpha\beta}z \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 8;\ \alpha \gtrless \beta),$$

wo die Coefficienten constant sind.

Diese Constanten müssen so beschaffen sein, dass die linearen Gleichungen zwischen den $F_{\alpha\beta}$ identisch erfüllt sind. Da nun zwischen F_{12}, F_{13} und irgend einem andern $F_{1\alpha}$ eine lineare Gleichung besteht, so muss ein Werthsystem

$$a_1, \quad b_1, \quad c_1$$

existiren, wofür alle sieben linearen Ausdrücke $F_{1\alpha}$ gleichzeitig verschwinden. Dasselbe gilt für jeden andern Index: 2, 3, ... 8. Es sind also im Ganzen acht Systeme von je drei Constanten:

$$(a_1, b_1, c_1), \quad \ldots \quad (a_8, b_8, c_8)$$

definirt, von der Beschaffenheit, dass allgemein $F_{\alpha\beta} = 0$ wird für

$$(x, y, z) = (a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$$

und

$$(x, y, z) = (a_\beta, b_\beta, c_\beta).$$

Wir können uns diese, um eine bequeme Ausdrucksweise zu gewinnen, als homogene Coordinaten von Punkten einer Ebene vorstellen. (x, y, z) ist dann ein veränderlicher Punkt; $F_{\alpha\beta} = 0$ die Gleichung einer Geraden, welche durch die festen Punkte α, β hindurchgeht. Hierdurch ist die Function $F_{\alpha\beta}$ bis auf einen constanten Factor bestimmt.

Alle neun Werthsysteme (x, y, z) und $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$ können einer gemeinsamen linearen Transformation unterworfen werden. Ferner können z und alle Grössen c als 1 angenommen werden, da es nur auf die Ver-

hältnisse der Coordinaten ankommt. Somit sind von den 24 Constanten a_α, b_α, c_α nur acht als wesentliche zu betrachten.

Im Verlauf der Untersuchung wird sich deutlich ergeben, dass alle Grössen

$$\sqrt{\frac{v_a v_b}{v_c v_{abc}}}$$

rational durch x, y, z dargestellt werden können, und dass hierbei auch keine anderen Constanten auftreten, als die Grössen a, b, c. Nun müssen aber acht unabhängige wesentliche Constanten wirklich in der algebraischen Untersuchung vorkommen. Deswegen können wir von vornherein die Annahme ausschliessen, dass zwischen diesen acht Werthsystemen a, b, c irgend eine Gleichung besteht. Zwischen x, y, z dagegen muss sich eine Gleichung ergeben, deren Coefficienten von den Grössen a, b, c abhängen. Diese kann aber, einer anfänglich gemachten Bemerkung zufolge, nicht von niedrigerem als dem vierten Range sein; ihr Grad muss deswegen jedenfalls höher als 4 sein.

§ 3.

Wir stellen nun eine Reihe ähnlicher Systeme von je drei Wurzelfunctionen

$$\sqrt{v_a v_{aK}}, \quad \sqrt{v_b v_{bK}}, \quad \sqrt{v_c v_{cK}}$$

auf, die denselben Bedingungen genügen, wie das erste (was in jedem Falle leicht zu sehen ist), und die zur Definition von Functionen oder Curven höherer Grade führen. Zunächst das folgende:

$$\text{(II.)} \quad \sqrt{v_{678} v_{59\pi}}, \quad \sqrt{v_{139} v_{249}}, \quad \sqrt{v_{239} v_{149}},$$

dessen Periode

$$K = 1234 = 56789\pi$$

ist. Wenn wir alle drei Grössen mit demselben Factor

$$\sqrt{s_1}\sqrt{s_2}\sqrt{s_3}\sqrt{s_4}$$

multipliciren, und

$$\text{(1.)} \quad \sqrt{s_1}\sqrt{s_2}\sqrt{s_3}\sqrt{s_4}\sqrt{s_5}\sqrt{v_{678}} = G_{678}$$

setzen, so erhalten wir statt dessen:

$$G_{678}, \quad F_{13}F_{24}, \quad F_{23}F_{14}.$$

Da nun die F lineare Ausdrücke sind, so muss G eine quadratische Function von x, y, z sein. Die Zusammenstellung zeigt, dass diese quadratische Function in den Punkten 1, 2, 3, 4 verschwindet. Da man aber in der Gleichung 4 mit 5 vertauschen kann, so kann man auch einen zweiten Ausdruck für dieselbe Grösse G_{678} aufstellen, der im Punkte 5 verschwindet. Beide Ausdrücke müssen identisch sein, da keine quadratische Gleichung zwischen x, y, z besteht. Es ist daher, wenn α, β, γ irgend drei der Indices 1 bis 8 bedeuten und

$$(2.) \qquad \prod_{a=1}^{\infty}(\sqrt{s_a}) = P,$$

$$(3.) \qquad P\frac{\sqrt{v_{\alpha\beta\gamma}}}{\sqrt{s_\alpha}\sqrt{s_\beta}\sqrt{s_\gamma}} = G_{\alpha\beta\gamma}$$

gesetzt wird, $G_{\alpha\beta\gamma}$ eine quadratische Function von x, y, z, welche für alle Punkte der Reihe 1 bis 8 verschwindet, die von α, β, γ verschieden sind; oder, was dasselbe ist, $G_{\alpha\beta\gamma} = 0$ ist die Gleichung des Kegelschnitts, welcher durch die fünf von α, β, γ verschiedenen Hauptpunkte hindurchgeht. Hierdurch sind, bis auf constante Factoren, 56 Functionen zweiten Grades bestimmt.

Jetzt nehmen wir die Gruppe

$$(\text{III.}) \qquad \sqrt{v_{12\pi}v_{89\pi}}, \quad \sqrt{v_{419}v_{428}}, \quad \sqrt{v_{519}v_{528}}$$

mit der Periode 1289. Nun ist nach Formel (2.) in § 2 und (3.) in diesem Paragraphen:

$$\sqrt{v_{419}} = \frac{F_{14}}{\sqrt{s_1}\sqrt{s_4}},$$

$$\sqrt{v_{428}} = \frac{\sqrt{s_4}\sqrt{s_2}\sqrt{s_8}G_{428}}{P},$$

folglich

$$\sqrt{v_{419}v_{428}} = \frac{\sqrt{s_2}\sqrt{s_8}}{P\sqrt{s_1}}F_{14}G_{428}.$$

Multiplicirt man also die drei Grössen des Systems mit dem gemeinsamen Factor

$$\frac{P\sqrt{s_1}}{\sqrt{s_2}\sqrt{s_8}}$$

und setzt:

$$(4.) \qquad \frac{P\sqrt{s_1}}{\sqrt{s_2}}\sqrt{v_{12\pi}} = H_{1,2},$$

so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$H_{1,2} = AF_{14}G_{428} + BF_{15}G_{528},$$

wo A und B Constanten bedeuten. Beide Terme, aus denen $H_{1,2}$ gebildet ist, sind kubische Functionen, die im Punkte 1 von der zweiten und ausserdem in 3, 4, 5, 6 und 7 von der ersten Ordnung verschwinden.

$H_{1,2}$ kann wieder nur auf eine Art als kubische Function von x, y, z dargestellt werden. Eine Vertauschung des Index 8 mit 7 in der aufgestellten Gleichung zeigt aber, dass dieser Ausdruck auch im Punkte 8 den Werth 0 annehmen muss. $H_{1,2}$ wird also 0 im Punkte 1 von der zweiten, in 3 bis 8 von der ersten Ordnung und ist hierdurch wiederum, abgesehen von dem constanten Factor, bestimmt. Allgemein ist $H_{\alpha,\beta} = 0$ diejenige Curve dritter Ordnung, welche durch alle Hauptpunkte mit Ausnahme von β hindurchgeht und in α einen Doppelpunkt besitzt. Auf diese Weise sind 2.28 specielle Curven dritter Ordnung definirt.

Hier ergiebt sich schon die Gleichung, welche zwischen x, y, z besteht, und zwar in einer grossen Anzahl verschiedener Formen; alle aber müssen dieselbe ebene Curve darstellen: $\Phi = 0$ — wenn der Ausgangspunkt dieser Untersuchung richtig ist. Aus der Gleichung (4.) folgt nämlich:

$$(5.) \qquad \frac{H_{1,2}}{H_{2,1}} = \frac{s_1}{s_2};$$

daher:

$$(6.) \qquad H_{1,2}H_{2,3}H_{3,1} - H_{2,1}H_{3,2}H_{1,3} = 0.$$

Diese Gleichung ist vom neunten Grade und kann unmöglich eine identische sein, da $H_{1,2}$, $H_{2,3}$ etc. sechs ganz verschiedene und nicht zerfallende Functionen dritten Grades sind. Wenn man x, y, z als unabhängige Grössen ansieht, so wird das Product

$$H_{1,2}H_{2,3}H_{3,1}$$

in allen acht Hauptpunkten 0 von der dritten Ordnung. Im Punkte 1 z. B. wird $H_{1,2}$ von der zweiten, $H_{2,3}$ von der ersten Ordnung 0; in 4 verschwinden alle drei Factoren. Dasselbe gilt von dem andern Product; es ist also $\Phi = 0$ die Gleichung einer Curve neunter Ordnung mit acht dreifachen Punkten.

Hierdurch allein ist die Curve noch nicht definirt, obgleich der Rang bestimmt ist und nicht grösser als 4 sein kann. Wir wissen: der Rang

darf auch nicht kleiner als 4 sein. Folglich kann die Curve andere Singularitäten nicht besitzen und speciell Φ nicht in Factoren niedrigeren Grades zerfallen. — Indessen gehen doch aus der Form der Gleichung schon Eigenschaften hervor, welche die Curve besonders charakterisiren.

$H_{1,2}$ und $H_{2,1}$ schneiden sich zwar einfach in den Punkten 3 bis 8, aber nicht in 1 und 2. Folglich schneiden sie sich ausser in den Hauptpunkten noch in drei andern Punkten, die ebenfalls auf der Curve neunten Grades liegen müssen. Dies gilt für jedes Functionenpaar $H_{\alpha,\beta}$, $H_{\beta,\alpha}$. Es werden also durch niedrigere Gleichungen eine grosse Anzahl von Punkten definirt, die auf der Curve Φ liegen.

§ 4.

Wir betrachten noch die beiden Systeme von gleicher Art, wie die vorigen:

$$\text{(IV.)} \quad \sqrt{v_{123}v_{49\pi}}, \quad \sqrt{v_{14\pi}v_{239}}, \quad \sqrt{v_{24\pi}v_{139}};$$

$$\text{(V.)} \quad \sqrt{v_{129}v_{19\pi}}, \quad \sqrt{v_{123}v_{13\pi}}, \quad \sqrt{v_{124}v_{14\pi}}.$$

Hier ist nun (Formel (4.) in § 3 und (2.) in § 2):

$$\sqrt{v_{14\pi}} = \frac{\sqrt{s_4}\cdot H_{1,4}}{\sqrt{s_1}\cdot P},$$

$$\sqrt{v_{239}} = \frac{F_{23}}{\sqrt{s_2}\cdot\sqrt{s_3}}.$$

Folglich führt das erste System, wenn

$$\text{(1.)} \quad P\sqrt{s_1}\sqrt{s_2}\sqrt{s_3}\sqrt{v_{123}} = J_{123}$$

gesetzt wird, zu einer Gleichung:

$$\text{(2.)} \quad J_{123} = AH_{1,4}F_{23} + BH_{2,4}F_{13}.$$

Ferner ist:

$$\sqrt{v_{123}} = \frac{\sqrt{s_1}\sqrt{s_2}\sqrt{s_3}}{P}G_{123},$$

$$\sqrt{v_{13\pi}} = \frac{\sqrt{s_1}H_{3,1}}{\sqrt{s_3}\cdot P};$$

folglich:

$$\sqrt{v_{123}}\sqrt{v_{13\pi}} = \frac{s_1\sqrt{s_2}}{P^2}H_{3,1}G_{123}.$$

Hier ist nun:

$$(3.) \qquad \frac{P^2\sqrt{v_{129}}}{\sqrt{s_1}\sqrt{s_2}} = K_{12}$$

zu setzen; dann führt das zweite System zu der Gleichung:

$$(4.) \qquad K_{12} = CG_{123}H_{3,1} + DG_{124}H_{4,1}.$$

Auf diese Weise zeigt sich, dass J_{123} und K_{12} Functionen vierten und fünften Grades werden. Und zwar sind die Terme, aus denen J_{123} besteht, 0 von der zweiten Ordnung in 1, 2 und 3, ausserdem von der ersten in 5, 6, 7, 8; diejenigen der Function fünften Grades K_{12} sind 0 von der zweiten Ordnung in 3, 4, 5, 6, 7, 8, von der ersten in 2. Aus denselben Gründen, wie in den früheren Fällen, folgt, dass J_{123} auch im Punkte 4, K_{12} auch in 1 verschwindet. Die Curve vierten Grades $J_{\alpha\beta\gamma} = 0$ geht also durch alle acht Hauptpunkte hindurch, und zwar sind α, β, γ Doppelpunkte; die vom fünften Grade $K_{\alpha\beta}$ hat alle von α, β verschiedenen Hauptpunkte zu Doppelpunkten, geht aber auch durch α, β selbst hindurch. Beide Curven sind hierdurch bestimmt.

Um das System zu vervollständigen, ist noch die Einführung von acht Functionen sechster Ordnung nothwendig. $P^2 s_\alpha$ wird eine Function sechsten Grades, die im Punkte α von der dritten, in den übrigen von der zweiten Ordnung verschwindet. Man sieht dies aus folgendem System:

$$(VI.) \qquad \sqrt{v_{19\pi}v_{59\pi}}, \quad \sqrt{v_{192}v_{592}}, \quad \sqrt{v_{193}v_{593}}, \quad \sqrt{v_{194}v_{594}},$$

das nicht zu denen der bisher betrachteten Art gehört, aber doch die gemeinsame Periode 15 hat und deshalb durch eine lineare Gleichung verbunden sein muss. Es ist

$$\sqrt{v_{19\pi}v_{59\pi}} = \sqrt{s_1 s_5},$$

$$\sqrt{v_{192}} = \frac{F_{12}}{\sqrt{s_1}\sqrt{s_2}},$$

$$\sqrt{v_{592}} = \frac{\sqrt{s_5}\sqrt{s_2}}{P^2} K_{52};$$

deswegen kann diese Gleichung auf die Form gebracht werden:

$$P^2 s_1 = AF_{12}K_{52} + BF_{13}K_{53} + CF_{14}K_{54}.$$

Hier werden alle Glieder des Aggregats 0 von der dritten Ordnung im Punkte 1 und von der zweiten an allen übrigen Stellen mit Ausnahme von 2; das ganze Aggregat muss aber natürlich auch an dieser Stelle

von der zweiten Ordnung verschwinden. Diese ebenfalls bestimmte und nicht zerfallende Function sechsten Grades werden wir mit $L_{19\pi}$ bezeichnen.

Wenn man nun die ganze Reihe der Functionen ersten bis fünften Grades F, G, H, J, K betrachtet, so sieht man, dass diese sich paarweise zu Producten ergänzen, Functionen sechsten Grades, die gleichmässig in allen acht Hauptpunkten von der zweiten Ordnung verschwinden. Diese Producte bezeichnen wir gleichfalls mit L. Dem linearen Ausdruck $F_{\alpha\beta}$ steht auf diese Weise gegenüber die Function fünften Grades $K_{\alpha\beta}$; in derselben Beziehung stehen $G_{\alpha\beta\gamma}$ und $J_{\alpha\beta\gamma}$, endlich die beiden kubischen Functionen $H_{\alpha,\beta}$ und $H_{\beta,\alpha}$. Wir setzen

$$F_{\alpha\beta}\, K_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta 9},$$
$$G_{\alpha\beta\gamma}\, J_{\alpha\beta\gamma} = L_{\alpha\beta\gamma},$$
$$H_{\alpha,\beta} H_{\beta,\alpha} = L_{\alpha\beta\pi}.$$

Hierzu kommen noch die acht Functionen $L_{\alpha 9\pi}$, welche nicht zerfallen, dafür in einem der Hauptpunkte von der dritten anstatt von der zweiten Ordnung verschwinden.

Es giebt aber nur vier linear unabhängige Functionen sechsten Grades, die in acht gegebenen Punkten von der zweiten Ordnung verschwinden; ist

$$X,\quad Y,\quad Z,\quad U$$

ein solches System von vier Functionen sechsten Grades, so können alle 120 Grössen L_m als lineare Functionen derselben:

$$(5.)\qquad L_m = A_m X + B_m Y + C_m Z + D_m U$$

dargestellt werden. Dies führt zu der auf dem Kegel liegenden Raumcurve.

Wir fassen jetzt alle Gleichungen zusammen, durch welche die Grössen L und ihre Factoren ursprünglich definirt sind:

$$(6.)\qquad \begin{cases} F_{\alpha\beta} = \sqrt{s_\alpha}\sqrt{s_\beta}\sqrt{v_{\alpha\beta 9}}, \quad K_{\alpha\beta} = \dfrac{P^2\sqrt{v_{\alpha\beta 9}}}{\sqrt{s_\alpha}\sqrt{s_\beta}}, \quad L_{\alpha\beta 9} = F_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}; \\ G_{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{P\sqrt{v_{\alpha\beta\gamma}}}{\sqrt{s_\alpha}\sqrt{s_\beta}\sqrt{s_\gamma}}, \quad J_{\alpha\beta\gamma} = P\sqrt{s_\alpha}\sqrt{s_\beta}\sqrt{s_\gamma}\sqrt{v_{\alpha\beta\gamma}}, \quad L_{\alpha\beta\gamma} = G_{\alpha\beta\gamma} J_{\alpha\beta\gamma}; \\ H_{\alpha,\beta} = \dfrac{P\sqrt{s_\alpha}\sqrt{v_{\alpha\beta\pi}}}{\sqrt{s_\beta}}, \quad H_{\beta,\alpha} = \dfrac{P\sqrt{s_\beta}\sqrt{v_{\alpha\beta\pi}}}{\sqrt{s_\alpha}}, \quad L_{\alpha\beta\pi} = H_{\alpha,\beta} H_{\beta,\alpha}; \end{cases}$$

$$(7.)\qquad s_\alpha = v_{\alpha 9\pi}; \quad P^2 s_\alpha = L_{\alpha 9\pi}; \quad P = \prod_{\alpha=1}^{8} (\sqrt{s_\alpha}).$$

Die Combination dieser Gleichungen ergiebt zunächst

$$(8.) \qquad P^2 v_m = L_m$$

für jeden der 120 Indices m; ausserdem verschiedene Formen der Gleichung neunten Grades $\Phi = 0$. Eine Gruppe derselben haben wir schon betrachtet. Ausserdem ist:

$$(9.) \qquad L_{\alpha 9\pi} H_{\beta,\alpha} = L_{\beta 9\pi} H_{\alpha,\beta},$$

$$(10.) \qquad J_{\alpha\beta\gamma} K_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta\gamma} L_{\gamma 9\pi},$$

$$(11.) \qquad \frac{K_{12} K_{34} K_{56} K_{78}}{F_{12} F_{34} F_{56} F_{78}} = \sqrt[3]{L_{19\pi} L_{29\pi} \ldots L_{89\pi}}.$$

Die mittlere von diesen Gleichungen zeigt, dass auch die drei Punkte, in denen $F_{\alpha\beta} = 0$ und $K_{\alpha\beta} = 0$ sich treffen ausser den Hauptpunkten, auf der Curve neunter Ordnung liegen; ebenso diejenigen drei, welche $G_{\alpha\beta\gamma} = 0$ und $J_{\alpha\beta\gamma} = 0$ gemeinsam sind. Endlich kann vermöge der Determinantenausdrücke F, G, H, etc. jeder Quotient

$$\sqrt{\frac{v_a r_b}{v_c v_{abc}}}$$

rational durch die Verhältnisse der Grössen x, y, z ausgedrückt werden.

Aber es ist bei dieser Darstellung auch evident, dass die Grössen

$$\sqrt{\frac{v_m}{v_n}} = \sqrt{\frac{L_m}{L_n}}$$

Functionen sind, die im Gebilde beständig den Charakter rationaler besitzen und nur an drei Stellen 0, an ebenso vielen unendlich werden; besonders leicht ist dies zu erkennen, wenn L_m und L_n zu den zerfallenden Functionen gehören:

$$L_m = QR, \quad L_n = ST.$$

Die Hauptpunkte können dann nicht mitgerechnet werden, weil Zähler und Nenner in diesen von der gleichen Ordnung unendlich werden; die übrigen Nullpunkte von Q sind zugleich Nullpunkte von R, weil die Gleichung der Curve immer in der Form

$$QR_1 - RQ_1 = 0$$

geschrieben werden kann. Da die Anzahl der Nullpunkte immer drei beträgt, so sind

$$A_m X + B_m Y + C_m Z + D_m U = 0$$

die Gleichungen der dreifach berührenden Ebenen derjenigen Raumcurve, deren Coordinaten X, Y, Z, U sind. Schon hieraus ist zu sehen, dass diese von der sechsten Ordnung sein muss.

§ 5.

In dem Vorhergehenden wurde absichtlich auf die constanten Factoren, mit denen die Functionen F, G, H etc. als behaftet gedacht werden müssen, keine Rücksicht genommen, weil sich diese Frage einfacher algebraisch oder mit Hülfe elliptischer Functionen erledigen lässt. Auf diese Weise gelangen wir auch zu einer Verification der erhaltenen Resultate, namentlich des wichtigsten Punktes, dass die in verschiedenen Formen auftretenden Beziehungen zwischen x, y, z doch nur einer einzigen Gleichung äquivalent sind. Die Curve, deren Gleichung $\Phi = 0$ ist, ist eine den Geometern bekannte; es ist dieselbe, auf welche Herr *Bertini* in seinen Untersuchungen über eindeutige involutorische Transformationen in der Ebene geführt wurde *).

Es seien acht Punkte in einer Ebene gegeben, in der Art, dass nicht drei auf einer Geraden, nicht sechs auf einem Kegelschnitt liegen und auch nicht eine Curve dritten Grades gezogen werden kann, welche durch alle acht Punkte hindurchgeht und einen derselben zum Doppelpunkt hat **). Die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten dieser acht festen Punkte seien

$$a_1,\ b_1;\quad a_2,\ b_2;\quad \ldots\quad a_8,\ b_8;$$

und x, y die eines variabeln Punktes.

Wenn man alsdann zunächst die ganzen Functionen dritten Grades von x, y betrachtet, welche in diesen acht Punkten verschwinden, so lassen sich alle linear-homogen durch zwei unter ihnen, A und B, ausdrücken. Die Curven $A = 0$, $B = 0$, ebenso wie alle des Büschels $A - \lambda B = 0$ haben dann noch einen neunten Punkt a_9, b_9 gemeinsam, dessen Coordinaten, wie bekannt, rational durch a_1, b_1; $\ldots$ a_9, b_9 dargestellt werden können.

Gehen wir nun über zu den Functionen sechsten Grades von x, y, die in den acht gegebenen Punkten von der zweiten Ordnung verschwinden, so sind unter diesen vier linear unabhängige: X, Y, Z, U. Da aber offenbar A^2, B^2 und AB zu ihnen gehören, so kann man direct

$$X = A^2,\quad Y = AB,\quad Z = B^2$$

---

*) *Bertini*, Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano. Annali di matematica 1877. In einer Anmerkung erwähnt Herr *Bertini*, dass Eigenschaften der Curve schon vorher Herrn *Cremona* bekannt gewesen.

**) Diesen Bedingungen entsprechen diejenigen Determinanten, durch welche sich die Nullwerthe der Theta im vorliegenden Falle am einfachsten ausdrücken lassen.

setzen, woraus folgt:

$$Y^2 - ZX = 0,$$

d. h.: Wenn man X, Y, Z, U als homogene Coordinaten eines Raumpunktes betrachtet, so liegt dieser auf einem Kegel zweiten Grades.

Wenn man eine Function dritten Grades bildet, welche im Punkte 1 von der zweiten Ordnung, und ausserdem in den Punkten 3 bis 8 verschwindet, so ist diese unter den angenommenen Voraussetzungen in den Punkten 2 und 9 von 0 verschieden, und sie wird jetzt genau bestimmt sein, wenn wir noch die Bedingung hinzufügen, dass sie in dem Restpunkte 9 den Werth 1 erhalten soll. Diese unzweideutig definirte Function nennen wir jetzt $H_{1,2}$. In gleicher Weise denken wir uns die ganze Gruppe

$$H_{1,2}, \quad H_{1,3}, \quad H_{2,1} \quad \text{etc.}$$

bestimmt. Das Product

$$H_{1,2} H_{2,1} = L_{12\pi}$$

besitzt dann im Punkte 9 ebenfalls den Werth 1. Da es linear durch U, A^2, AB, B^2 darstellbar sein muss, A und B aber im Punkte 9 verschwinden, so muss auch U im Punkte 9 einen von 0 verschiedenen Werth besitzen, den wir $= 1$ annehmen können.

Wir setzen jetzt

$$\frac{A}{B} = \lambda.$$

Indem wir dem λ einen festen Werth beilegen, wird der Punkt x, y auf eine Curve dritten Grades

$$G = A - \lambda B = 0$$

beschränkt, die — specielle Werthe von λ ausgeschlossen — ohne Singularität und deshalb vom Range 1 ist. Führt man eine neue Variable u ein durch die Differentialgleichung

$$du = \frac{dx}{\frac{\partial G}{\partial y}},$$

so werden x und y elliptische Functionen dritten Grades von u, welche in denselben drei Punkten unendlich sind. Die Summe dieser drei Werthe des u, für welche x und y unendlich werden, sei c; ferner seien

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_9$$

diejenigen Werthe, welche u in den auf der Curve liegenden Punkten

a_1, b_1; ... a_9, b_9 erhält. A und B sind dann proportional einer elliptischen Function neunten Grades $f(u)$, welche für $u = u_1, u_2, \ldots u_9$ verschwindet und für diejenigen Werthe, für welche x, y unendlich werden, von der dritten Ordnung unendlich gross wird. Es muss daher

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_9 = 3c$$

sein. Um diese elliptische Function vollständig zu bestimmen, nehmen wir an, dass ihre Ableitung für $u = u_9$ den Werth 1 erhält:

$$f'(u_9) = 1.$$

§ 6.

$H_{1,2}$ wird nun ebenfalls eine elliptische Function neunten Grades, die für dieselben Werthe unendlich wird wie $f(u)$ und von derselben Ordnung. Von den Nullwerthen sind acht unmittelbar gegeben; es wird nämlich $H_{1,2} = 0$ für $u = u_1$ von der zweiten Ordnung; ausserdem von der ersten für $u = u_3, u_4, \ldots u_8$. Der Quotient

$$(1.) \qquad \frac{H_{1,2}}{f(u)} = \psi_{1,2}(u)$$

ist daher eine elliptische Function zweiten Grades, welche unendlich wird für $u = u_9$ und $u = u_2$, 0 für $u = u_1$; sie muss deswegen ausserdem noch 0 werden für $u = u_2+u_9-u_1$. Da für $u = u_9$

$$H_{1,2} = 1, \quad f(u) = 0, \quad f'(u) = 1$$

wird, so ist

$$(u-u_9)\psi_{1,2}(u) = 1 \quad \text{für} \quad u = u_9.$$

Wenn wir jetzt das Product bilden:

$$(2.) \qquad \psi_{1,2}(u)\psi_{2,1}(u) = \chi_{12}(u),$$

so heben sich die Null- und Unendlichkeitswerthe u_1 und u_2 gegenseitig auf; wir erhalten wieder eine Function zweiten Grades, deren Entwickelung in der Nähe der Stelle u_9 anfängt mit

$$\frac{1}{(u-u_9)^2}$$

und welche 0 wird für

$$u-u_9 = u_2-u_1 \quad \text{und} \quad u-u_9 = u_1-u_2.$$

Diese lässt sich also durch die *Weierstrass*sche Grundfunction $\wp(u)$ in fol-

gender Weise darstellen:

$$(3.) \qquad \chi_{12}(u) = \wp(u-u_9)-\wp(u_1-u_2).$$

Somit ergiebt sich:

$$(4.) \qquad L_{12\pi} = H_{1,2}H_{2,1} = f^2\{\wp(u-u_9)-\wp(u_1-u_2)\}.$$

In ähnlicher Weise lassen sich die übrigen Grössen L_m darstellen.

Bilden wir jetzt das Product

$$(5.) \qquad \psi_{1,2}(u)\psi_{2,3}(u)\psi_{3,1}(u) = \psi_{1,2,3}(u),$$

so wird dieses für $u = u_1$, u_2, u_3 ebenfalls weder 0 noch ∞; denn es wird zwar $\psi_{3,1} = \infty$ für $u = u_1$, für denselben Werth aber der erste Factor $\psi_{1,2} = 0$. Somit ist dies eine Function dritten Grades, welche ∞ wird für $u = u_9$ wie

$$\frac{1}{(u-u_9)^3},$$

und 0 für $u-u_9 = u_2-u_1$, u_3-u_2, u_1-u_3. Diese muss sich deshalb darstellen lassen in der Form

$$\psi_{1,2,3}(u) = -\tfrac{1}{2}\wp'(u-u_9)+a\wp(u-u_9)+b,$$

wo a, b von u unabhängig sind.

Vertauschen wir zwei Indices, z. B. 1, 2, so erhalten wir eine Function, die sich in der gleichen Form darstellen lassen muss, die aber für die entgegengesetzten Werthe von $u-u_9$:

$$u_1-u_2, \quad u_3-u_1, \quad u_2-u_3$$

verschwindet. Somit müssen für diese die Coefficienten a, b entgegengesetzte Werthe erhalten. Daraus folgt:

$$(6.) \qquad \psi_{1,2,3}(u)+\psi_{2,1,3}(u) = -\wp'(u-u_9)$$

oder:

$$(7.) \qquad H_{1,2}H_{2,3}H_{3,1}+H_{2,1}H_{3,2}H_{1,3} = -f^3\wp'(u-u_9).$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass der Ausdruck auf der linken Seite, den wir jetzt als rationale Function der unabhängigen Grössen x, y mit $\Phi(x, y)$ bezeichnen können, ungeändert bleibt, wenn wir die Indices oder Punkte 1, 2, 3 durch irgend welche anderen der Reihe 1 bis 8 ersetzen. Die Identität ist für einen willkürlichen Werth von λ, somit für jeden Punkt der Ebene erwiesen. Wenn in Bezug auf das Vorzeichen die Gleichung nicht in Uebereinstimmung ist mit der Formel (6.) in § 3, so ist der Grund hierfür natürlich in dem Umstande zu suchen, dass wir hier besondere —

und zwar genauere — Festsetzungen über die constanten Factoren der Functionen H getroffen haben.

Wir nehmen als Anfangspunkt des Integrals u den Punkt 9, sodass $u_9 = 0$ ist.

Den Gleichungen (4.) und (7.) können wir dann folgende Form geben:

$$(8.) \qquad \frac{L_{12\pi}}{B^2} = m\wp(u)+m',$$

$$(9.) \qquad \frac{\Phi(x,y)}{B^3} = n\wp'(u),$$

wo m, m' und n von u unabhängig sind, und zwar m, n von 0 verschieden. In der Gleichung (8.) können wir $L_{12\pi}$ ersetzen durch irgend eine Function U sechsten Grades, die in den acht festen Punkten von der zweiten Ordnung verschwindet, aber nicht im Punkte 9, denn es ist dann $L_{12\pi}$ identisch mit einer linearen Function von U, A^2, B^2, AB; das Verhältniss $A:B$ aber constant für die Punkte der Curve G. Es ist also auch:

$$(10.) \qquad \frac{U}{B^2} = c\wp(u)+c',$$

wo c und c' als Constanten zu betrachten sind, unter der Voraussetzung, dass der Quotient

$$\frac{A}{B} = \lambda$$

nicht variirt wird.

Diejenigen Punkte der Curve G, in denen diese zusammentrifft mit der Curve neunter Ordnung, abgesehen von den Hauptpunkten, sind durch die Gleichung $\wp'(u) = 0$ definirt. Diese Gleichung kann, zufolge (10.), ersetzt werden durch:

$$(11.) \qquad d\left(\frac{U}{B^2}\right) = 0,$$

welche gilt, wenn $\frac{A}{B}$ nicht variirt, d. h.

$$(12.) \qquad d\left(\frac{A}{B}\right) = 0$$

angenommen wird. Nun sind $\frac{A}{B}$ und $\frac{U}{B^2}$ rationale Functionen von x und y; die Gleichung der Curve neunten Grades wird also erhalten, indem man dx, dy aus (11.) und (12.) eliminirt:

$$(13.)\qquad \begin{vmatrix} A & B & 2U \\ \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial B}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Noch symmetrischer wird diese Gleichung, wenn man wieder homogene Coordinaten x, y, z einführt:

$$(14.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial B}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial A}{\partial z} & \frac{\partial B}{\partial z} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Zu der Gleichung der auf dem Kegel

$$XZ = Y^2$$

gelegenen Raumcurve sechster Ordnung, deren 120 dreifach berührende Ebenen durch die linearen Ausdrücke L_m bestimmt werden, kann man auf folgende Weise gelangen.

Es giebt im Ganzen 22 linear unabhängige Functionen achtzehnten Grades von x, y, welche in den acht Hauptpunkten von der sechsten Ordnung verschwinden. Davon lassen sich 16 bilden als kubische Functionen von U, A^2, B^2, AB; sieben andere sind:

$$\Phi^2;\quad \Phi UA,\quad \Phi UB,\quad \Phi A^3,\quad \Phi A^2B,\quad \Phi AB^2,\quad \Phi B^3.$$

Zwischen diesen 23 Ausdrücken muss also identisch eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten bestehen. Indem wir denjenigen Theil des Aggregats, welcher eine kubische Form von U, A^2, AB, B^2 ist, als $M(U; A, B)$ bezeichnen, können wir dieser Gleichung die Form geben:

$$(15.)\qquad M(U; A, B) = c\Phi^2 + \Phi N(U; A, B),$$

wo N ebenfalls einen ganzen rationalen Ausdruck bedeutet.

Beschränkt man jetzt x, y auf eine willkürliche Curve des Büschels — also den Raumpunkt auf eine Gerade des Kegels —, so geht durch die Formeln (9.) und (10.) die Gleichung (15.) über in eine Relation zwischen $\wp(u)$, $\wp'(u)$, welche in Bezug auf $\wp'(u)$ quadratisch, in Bezug auf $\wp(u)$ vom dritten Grade ist. Dies kann keine andere sein, als die Differentialgleichung für $\wp'(u)$. Hieraus folgt, dass der Term ΦN, welcher linear in $\wp'(u)$ wird,

identisch verschwinden muss für jeden Werth von λ. Man kann deswegen direct

$$\Phi^2 = M(U;\ A,\ B)$$

setzen. — Es giebt, wenn wir von constanten Factoren absehen, keine andere ganze rationale Function von x, y, für welche eine solche Identität sich aufstellen liesse. Denn, wäre auch

$$\Phi_1^2 = M_1(U;\ A,\ B),$$

wo M_1 gleichfalls eine kubische Form von U, A^2, B^2, AB bedeutet, so müsste auch Φ_1 in den acht Hauptpunkten von der dritten Ordnung verschwinden. Daraus würde folgen, dass sich Φ_1 in der Form

$$\Phi_1 = c\Phi + N_1(U;\ A,\ B)$$

darstellen liesse, wo N_1 einen Ausdruck bedeutet von derselben Art wie der oben mit N bezeichnete. Wir hätten dann für Φ eine Gleichung

$$2c\Phi N_1 = M_1 - c^2 M - N_1^2,$$

die unmöglich ist, ausser für $N_1 = 0$. — Dies giebt eine Methode, algebraisch zugleich die ebene und die entsprechende Raumcurve zu definiren:

Wenn man vier linear unabhängige homogene Functionen sechsten Grades von x, y, z aufstellt:

$$X,\quad Y,\quad Z,\quad U,$$

die in acht festen Punkten unabhängiger Lage von der zweiten Ordnung verschwinden, so besteht zwischen ihnen zunächst identisch eine quadratische Gleichung mit verschwindender Determinante (also die eines Kegels):

$$K = 0.$$

Unter den rationalen Functionen von x, y, z giebt es dann eine — durch diese Bedingung bis auf einen constanten Factor bestimmte — deren Quadrat sich als ganze kubische Function von X, Y, Z, U darstellen lässt:

$$|\Phi(x,\ y,\ z)|^2 = M(X,\ Y,\ Z,\ U).$$

Dieselbe ist der gemeinsame Theiler der vier Functional-Determinanten von X, Y, Z, U. Diejenigen speciellen linearen Ausdrücke in X, Y, Z, U, welche, als abhängig von x, y, z betrachtet, zerfallen in die Factoren $F_{\alpha,\beta}$, $K_{\alpha,\beta}$; $G_{\alpha\beta\gamma}$, $J_{\alpha\beta\gamma}$; $H_{\alpha,\beta}$, $H_{\beta,\alpha}$ oder endlich in einem der acht Punkte von der dritten Ordnung Null werden, definiren die 120 dreifach berührenden Ebenen der auf dem Kegel $K = 0$ gelegenen Raumcurve sechster Ordnung $M = 0$.

Zürich, den 5. Februar 1887.

Bemerkungen über $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ *).

(Von Herrn *P. du Bois-Reymond.*)

Unter der Benennung *Dirichlet*sches Princip werden zwei Sätze zusammengefasst: Erstens das Existenztheorem, nach welchem es stets eine, mit ihren Differentialquotienten im Innern einer geschlossenen Curve stetige, der Gleichung $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ genügende Function z giebt, die sich bei Annäherung an jene Curve einer dort willkürlich gewählten Function unbegrenzt nähert, und zweitens das Eindeutigkeitstheorem, nach welchem die Function z durch die willkürlich gewählte Randfunction eindeutig bestimmt ist. Die erstere Behauptung ist meines Wissens von *Dirichlet* im Druck nicht ausgesprochen worden. Doch findet sie sich in dem sechsten Abschnitt seiner Vorlesung über Potentiale in der *Grube*schen Wiedergabe. Auch beruft sich *Riemann* auf jene Vorlesung **). Der dem Existenzbeweise zu Grunde liegende Schluss, den man auch bei *Gauss* ***) findet, auf das Vorhandensein einer Function, die ein gewisses Integral zum Minimum macht, wird heute mit Recht nicht mehr als bindend angesehen, und, wie ich hinzufüge, ist er bei Doppelintegralen (um so mehr bei dreifachen Integralen), bei denen die Function über eine ganze Fläche mit gegebenen Begrenzungen sich erstrecken soll, besonders bedenklich. In dem *Dirichlet*schen Beweise spielen zudem noch die Randwerthe der Differentialquotienten

*) Dieser Aufsatz ist ein Theil einer vor längerer Zeit verfassten Abhandlung über den Titelgegenstand, deren Fortsetzung ich bei Gelegenheit veröffentlichen werde. Einiges im vorliegenden Aufsatz ist in einer inzwischen erschienenen Schrift des nun verstorbenen *Axel Harnack* ebenfalls behandelt. Doch ist es so wenig, dass ich deshalb keine Aenderung in der ursprünglichen Abfassung für nöthig erachtet habe.

**) *Riemanns* ges. Werke, pag. 90.

***) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse etc. Art. 31.

der unbekannten Function eine übrigens auch den Eindeutigkeitssatz berührende Rolle, welche die Tragweite der Beweise einschränkt.

Von Beweisen in der Functionentheorie, namentlich Existenzbeweisen, kann man auch ohne eingehende Prüfung aussagen, dass sie ungenügend sind, wenn sie nicht zu genauen Bestimmungen führen über die Schranken, innerhalb deren die Functionen des Existenzbeweises sich bewegen dürfen. Wie Herr ***Kronecker*** treffend bemerkt, ist jeder wirkliche Existenzbeweis in seinem Nerv eine Vorschrift zur wirklichen Darstellung der Grössen, die als vorhanden bewiesen werden sollen, wenn eine solche Darstellung auch aus *äusseren* Gründen unausführbar erscheinen mag. So muss denn ein befriedigender Existenzbeweis genaue, wenigstens ausreichende Bedingungen ergeben. Daher besteht der *positive* Werth der guten Beweise der Functionentheorie darin, dass sie den zu beweisenden Sätzen einen verlässlichen Gültigkeitsbereich abgrenzen, was einige Mathematiker zu übersehen scheinen. Sie stellen nicht bloss Wahrheiten fest, „die längst nicht bezweifelt wurden", sondern sie bestimmen Gebiete, ausserhalb deren die Wahrheiten Irrthümer werden können.

Was nun das *Dirichlet*sche Princip betrifft, so ist sein zweiter Theil, der Eindeutigkeitsbeweis, von bleibendem praktischem Nutzen. Denn die Verhältnisse am Rande, das Unendlichwerden der Differentialquotienten, die Unstetigkeiten der Randfunction, die Beschaffenheit der Randcurve selbst, kommen in den Anwendungen kaum in Betracht. Hinsichtlich des Existenzbeweises darf man auf Grund von Beispielen und allgemeinen Ueberlegungen die Hoffnung hegen, es werde nachzuweisen gelingen, dass seine Behauptung richtig ist *für eine rectificirbare Randcurve* *), *die sich nicht schneidet, und für eine integrirbare Randfunction.* Ob der Eindeutigkeitssatz so weit sich erstreckt, ist wegen der unendlich werdenden Differentialquotienten von z am Rande fraglich, doch spricht in dieser Hinsicht kein Beispiel gegen

---

*) Ich bin auf diesen Begriff näher eingegangen in einer Abhandlung: „Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung", Leipz. Ann. XV. Band, pag. 283. Indessen ist bei den partiellen Differentialgleichungen wohl ein beschränkterer als der dort entwickelte Rectificirbarkeitsbegriff angemessen, obschon nicht nothwendig. Da nämlich, vor der Hand, die Beschaffenheit der am Rande aufzustellenden Functionen, der dort willkürlichen und der die Integration bewirkenden die Hauptschwierigkeit bildet, so wird man das Problem nicht unnöthig verwickeln wollen, und als rectificirbar zunächst solche Functionen zu verstehen vorziehen, ***die einen bis auf einzelne Punkte stetigen Differentialquotienten besitzen.***

ihn. Wenn die Randcurve sich schneidet, z also nicht mehr eindeutig ist, so finden verwickeltere Verhältnisse statt, die wir hier ausser Spiel lassen.

Bekanntlich hat Herr *C. Neumann* es unternommen, mit Hülfe seiner Methode des arithmetischen Mittels *) den Existenzsatz wiederherzustellen, und es ist ihm dies schon in solchem Umfang geglückt, dass voller Erfolg zu erwarten ist. Um so mehr darf gegenwärtig der, welcher in dieser Materie forscht, mit einiger Beruhigung das *Dirichlet*sche Princip wenigstens als eine Voraussetzung, gleichsam als Axiom gelten lassen, allerdings mit der nöthigen Vorsicht die Randverhältnisse betreffend.

2.

Die doppelte Entstehung des Integrals über die Randcurve.

Sind z und ζ zwei Lösungen von $\Delta z = 0$, so ist:

$$(1.) \qquad U dx + V dy = \left(z \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \zeta \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx + \left(\zeta \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) dy$$

ein vollständiges Differential, wie direct zu sehen, dessen Integral über eine geschlossene Linie also unter gewissen Umständen Null ist.

Andererseits findet man, wenn man $\zeta \Delta z = 0$ oder $z \Delta \zeta = 0$, oder (nach *Riemanns* Vorgang)

$$\zeta \Delta z - z \Delta \zeta = \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = 0$$

mit $dx\,dy$ multiplicirt und über ein Areal summirt, dass das Integral

$$\int (U dx + V dy)$$

über die Begrenzung des Areals ebenfalls unter gewissen Umständen Null ist. Es handelt sich also nur um die Bedingungen, unter denen in beiden Herleitungen das Integral $\int (U dx + V dy)$ Null ist.

Geht man von der Gleichung $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$ aus, und setzt

$$f(x, y) = \int_c^x U(x, y) dx + \int_{c_1}^y V(c, y) dy + C,$$

so ist $U = \frac{\partial f}{\partial x}$, $V = \frac{\partial f}{\partial y}$. Sodann sind c und c_1, sonst willkürlich, so zu

*) „Ueber die Methode des arithmetischen Mittels“ (XIII. Bd. der Abh. der math.-phys. Klasse der K. Sächs. Gesellschaft d. Wissensch.) und andere Schriften.

wählen, dass die Integrale einen Sinn haben. Dann ist

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} (U dx + V dy) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

auf zweien die Punkte x_0, y_0 und x, y verbindenden Integrationswegen gleich, wenn 1. die Integrationswege rectificirbar sind; wenn 2.

$$U(x, y) \quad \text{und} \quad V(x, y) = \int_c^x \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} + V(c, y)$$

auf und zwischen den Integrationswegen nur so, und zwar nur in Punkten unstetig werden, dass dies keinen Einfluss auf die Integrale hat. Würden sie in Linien unstetig, so würde das Integral $\int (U dx + V dy)$, falls sein Weg so geändert wird, dass er dabei die Unstetigkeitslinie in sich aufnimmt und wieder verlässt, ebenfalls unstetig geworden sein. 3. wollen wir U und V unverzweigt voraussetzen.

Diese ausreichenden Bedingungen für U und V, in denen diese selbst und ihre Argumente in gehöriger Weise vertauscht werden können, sind zwar unsymmetrisch. Dies ist indessen nicht ohne Analogon in der Theorie der vollständigen Differentiale (s. meine „Allgemeine Functionentheorie", pag. 136, Anm. und *O. Hölder*, „Beiträge zur Potentialtheorie" *), pag. 69).

Die Bedingungen für U und V lassen sich leicht in solche für z und ζ übertragen.

Man erhält solche Bedingungen für z und ζ direct durch die zweite Methode der Integration, z. B. von $\zeta \Delta z = 0$ über ein Areal. Man nimmt darin ζ mit allen seinen in Betracht kommenden Differentialquotienten stetig an, und z so beschaffen, dass die Integrale von $\zeta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\zeta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ nach x resp. y durch zweimalige partielle Integration auf die bekannte Weise transformirt werden können. Dies setzt zwar die Integrirbarkeit von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ voraus, gestattet diesen Grössen jedoch so unendlich zu werden, dass im Flächenintegral über die Unendlichkeitsstellen hinwegintegrirt werden kann, wodurch auch den Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ das Unendlichwerden ermöglicht ist, nur nicht in Linien, schon weil die Randcurve nicht mit

*) Inauguraldissertation.

solchen Linien zusammenfallen dürfte. Von der Flächenbegrenzung muss ferner die Rectificirbarkeit vorausgesetzt werden. Nimmt man endlich, worauf wir uns hier beschränken, z und ζ im Areal unverzweigt an, so ist ebenfalls über seine Begrenzung erstreckt

$$\int\left\{\left(z\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\zeta\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx+\left(\zeta\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)dy\right\} = 0.$$

Für den Weg über das Doppelintegral scheint übrigens *Riemann*s oben erwähnter Ausgangspunkt zweckmässiger zu sein. Aber ich glaube, dass der Weg über das vollständige Differential überhaupt den Vorzug verdient. Die auf beiden Wegen erhaltenen Bedingungen sind, wie ich finde, im Wesentlichen gleichwerthig. Doch gehe ich schon deshalb auf diesen etwas heiklen Gegenstand hier nicht weiter ein, weil ich doch darauf werde zurückkommen müssen, wenn ich bei einer späteren Gelegenheit die allgemeine Theorie des einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zugeordneten vollständigen Differentials, deren Grundzüge ich schon mittheilte *), eingehender zu entwickeln haben werde.

3.

Der erste Integralsatz der Gleichung $\Delta z = 0$.

Es seien x, y die Coordinaten der Punkte der Randcurve; ξ, η die eines Punktes im Innern, es sei

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \quad \text{und} \quad \zeta = R = \log\varrho;$$

dann findet man bekanntlich

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} 2\pi z(\xi,\eta) = \int\left\{\left(z\frac{\partial R}{\partial y}-R\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx+\left(R\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial R}{\partial x}\right)dy\right\} \\ \qquad\qquad = \int ds\left(z\frac{\partial R}{\partial N}-R\frac{\partial z}{\partial N}\right), \end{cases}$$

die Integrale über die Randcurve genommen. Man kann vom Differential (1.) ausgehen, es über die Randcurve und über einen um den Punkt ξ, η als Mittelpunkt gelegten Kreis, die man auf die übliche Weise durch eine Verbindungsdoppellinie zu einem Zug vereint, integriren, dann $\zeta = R$ setzen und den Kreis sich in seinen Mittelpunkt zusammenziehen lassen. Oder

*) „Ueber ein in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auftretendes vollständiges Differential", Math.-naturw. Mittheilungen von *Böklen* (bei Fues in Tübingen) I.

man nimmt als Areal für das Doppelintegral die Ringfläche zwischen der Randcurve und dem Kreise und verfährt dann ebenso. Etwaige Unendlich von z schliesst man durch Kreise aus mit Radien ϱ', und sie bleiben ohne Wirkung, wenn die Producte $\varrho' \frac{\partial z}{\partial x}$, $\varrho' \frac{\partial z}{\partial y}$, wo $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ den Peripherien der Ausschliessungskreise angehören, mit ϱ' verschwinden.

Ich führe dies an, um folgende Bemerkung daran zu knüpfen. Diese ganze Herleitung setzt voraus, dass die Grösse z unter dem Randintegral eine Function der zwei Variabeln x und y sei, welche der Gleichung $\Delta z = 0$ genügt. Denn das Integral über das Differential (1.) ist nur unter dieser Voraussetzung gebildet, und die Function z unter dem Doppelintegral muss, den Rand incl., ebenfalls der Gleichung $\Delta z = 0$ genügen, da sonst am Rande lineare Unstetigkeiten auftreten würden, und dort $\frac{\partial z}{\partial N}$ keinen Sinn hätte.

Wenn man nun gleichwohl in der Formel (I.) an Stelle der Function z zweier Variabeln sich eine Function einer Variabeln, d. i. s gesetzt denkt und diese Function willkürlich sein lässt, so geht die Berechtigung hierzu durchaus nicht aus der obigen Ableitung hervor, sondern erst aus dem stillschweigend vorausgesetzten *Dirichlet*schen Princip. Allerdings ist dieses Princip nicht seinem ganzen Umfange nach nöthig. Es ist für die Ableitung von (I.) nur nöthig zu wissen, dass es für eine gegebene Randcurve und eine dort gegebene willkürliche Function stets eine Lösung z von $\Delta z = 0$ giebt, die bei Annäherung an die Randcurve der dort gegebenen Function sich nähert, die sonst den oben angegebenen Stetigkeitsbedingungen genügt (die gewiss erfüllt sind, wenn z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ stetig sind), der jedoch in Punkten Unstetigkeiten gestattet sind, bei denen die oben näher angegebenen Grössen $\varrho' \frac{\partial z}{\partial x}$, $\varrho' \frac{\partial z}{\partial y}$ mit ϱ' gegen Null convergiren. Dann folgt aus der obigen Formel (I.), dass auch diese Unstetigkeiten ausgeschlossen sind, — vorausgesetzt, dass der Differentialquotient $\frac{\partial z}{\partial N}$ nicht in einer Weise unstetig wird, welche das Integral sinnlos macht. Diese letztere Möglichkeit ist zwar sehr störend, indessen gewinnt man doch den Satz, dass, wenn eine Function innerhalb eines Bezirks der Gleichung $\Delta z = 0$ genügt und man von ihr weiss, dass sie darin sammt ihren ersten Differentialquotienten stetig ist bis auf einzelne Punkte, in denen sie es vielleicht nicht ist, in jenem

Bezirk Unstetigkeiten nicht möglich sind, bei denen die obigen Grössen $\varrho' \frac{\partial z}{\partial x}$, $\varrho' \frac{\partial z}{\partial y}$ mit ϱ' verschwinden. Denn man kann in jedem solchen Bezirk beliebige kleinere abgrenzen, in denen die Formel (I.) ohne Zweifel gilt. Also sind bei Functionen, welche $\Delta z = 0$ genügen, punktweise Unstetigkeiten der angeführten Art ausser in Verzweigungspunkten überhaupt nicht möglich.

Die Formel (I.) veranlasst noch folgende Ueberlegung. Sie ist offenbar eine Lösung von $\Delta z = 0$, welche Functionen von s auch für z und $\frac{\partial z}{\partial N}$ genommen werden mögen. Ja, wenn man das Integral bildet

$$Z = \int (\Sigma \varphi_p(s) R_p) ds,$$

wo die $\varphi_p(s)$ beliebige Functionen vorstellen und R_p eine beliebige Succession von Differentialquotienten von R nach ξ und η, so ist Z eine Lösung von $\Delta Z = 0$, die innerhalb der Randcurve mit sämmtlichen Differentialquotienten stetig ist. Dies lehrt, ein wie unsicherer Begriff der der willkürlichen Functionen bei partiellen Differentialgleichungen ist, namentlich wenn sie unter Integralen auftreten. Denkt man sich nämlich innerhalb der Randcurve eine zweite Curve, so ist $Z = \Psi(s)$ auf dieser zweiten Curve Randfunction für deren Inneres und bestimmt nach dem *Dirichlet*schen Princip oder nach Gleichung (I.) (weil nämlich Z und $\frac{\partial Z}{\partial N}$ stetig sind) die Function im Innern. Also beschränkt sich die Mannigfaltigkeit der willkürlichen Functionen $\varphi_p(s)$ auf die der Einen $\Psi(s)$.

4.

Der Integralsatz (I.) und das *Cauchy*sche Randintegral.

Man hat zwischen dem *Cauchy*schen Satz

$$2\pi i f(\zeta) \cdot = \int \frac{f(z) dz}{z - \zeta}$$

(wo ich, um an gewohnte Bezeichnungen mich anzuschliessen, nicht wie in den vorigen und folgenden Artikeln unter z, ζ Lösungen der Differentialgleichung $\Delta z = 0$ verstehe, sondern $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ setze) und der *Fourier*schen Formel eine Verwandtschaft vermuthet, die aber nicht zu existiren scheint. Dagegen steht er zur Gleichung (I.) in nächster Beziehung. Ich

setze noch $f(z) = u+iv$, $\Delta\xi = x-\xi$, $\Delta\eta = y-\eta$, so wird die *Cauchy*sche Formel:

$$2\pi i(u+iv)_{\xi,\eta} = \int \frac{(dx+idy)(u+iv)_{x,y}}{\Delta\xi+i\Delta\eta},$$

woraus folgt:

$$2\pi u = \int \frac{dx(v\Delta\xi-u\Delta\eta)+dy(u\Delta\xi+v\Delta\eta)}{\Delta\xi^2+\Delta\eta^2},$$

$$-2\pi v = \int \frac{dx(u\Delta\xi+v\Delta\eta)-dy(v\Delta\xi-u\Delta\eta)}{\Delta\xi^2+\Delta\eta^2}.$$

Bedenken wir nun, dass, wieder

$$R = \tfrac{1}{2}\log(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2)$$

gesetzt:

$$\frac{dy\Delta\xi-dx\Delta\eta}{\Delta\xi^2+\Delta\eta^2} = dy\frac{\partial R}{\partial x} - dx\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial N}ds,$$

$$\frac{dx\Delta\xi+dy\Delta\eta}{\Delta\xi^2+\Delta\eta^2} = dx\frac{\partial R}{\partial x} + dy\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial s}ds$$

ist, so folgen die dem Theorem (I.) entsprechenden Formeln:

$$2\pi u = \int ds\left(u\frac{\partial R}{\partial N} + v\frac{\partial R}{\partial s}\right),$$

$$-2\pi v = \int ds\left(u\frac{\partial R}{\partial s} - v\frac{\partial R}{\partial N}\right),$$

von denen z. B. die erste in das Theorem (I.) übergeht, wenn man

$$v = v_0 + \int ds\frac{\partial u}{\partial N}$$

einführt und partiell integrirt. Multiplicirt man die zweite der vorstehenden Gleichungen mit i, addirt beide und multiplicirt noch einmal mit i, so erhält man wegen:

$$\frac{dz}{z-\zeta} = ds\left(\frac{\partial R}{\partial s} + i\frac{\partial R}{\partial N}\right)$$

das *Cauchy*sche Fundamentaltheorem zurück.

5.

Die *Green*sche Function.

Nach der *Green*schen Methode eliminirt man aus (I.) den Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial N}$, indem man die Herleitung von (I.) wiederholt, aber nicht mit der Lösung $\zeta = R$, sondern mit einer solchen $G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$, in der

ξ, η als fest gedacht sind, die am Rande ($\xi_1 = x$, $\eta_1 = y$) in R übergeht, im Innern aber sammt ihren Differentialquotienten stetig ist. Die Annahme einer solchen Function G ist nach dem *Dirichlet*schen Princip gestattet. Man hat dann

$$0 = \int ds \Big(z \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial N} - \frac{\partial z}{\partial N} R(x, y; \xi, \eta) \Big),$$

und dies von (I.) abgezogen giebt:

$$2\pi z = \int ds z H(x, y; \xi, \eta),$$

wo

$$H(x, y; \xi, \eta) = \frac{\partial R(x, y; \xi, \eta)}{\partial N} - \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial N}.$$

$G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$ ist die von Herrn *C. Neumann* *) *Green*sche Function genannte Grösse, und er zeigt u. A. von ihr, dass sie nach den Variabelnpaaren symmetrisch ist, dass

$$G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1).$$

Die Function

$$\zeta = \tfrac{1}{2} \log((\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2) - G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$$

ist ein Integral von $\Delta\zeta = 0$, das am Rande Null, für $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta$ aber logarithmisch unendlich wird.

Um ein Beispiel einer *Green*schen Function zu geben, nehmen wir als Randcurve eine Kreisperipherie. Es soll also $G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$ für $\xi_1 = x$, $\eta_1 = y$ gleich $\frac{1}{2}\log((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)$ werden. Versuchen wir den Ansatz

$$G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = \tfrac{1}{2}\log((\xi_1 - u)^2 + (\eta_1 - v)^2) + \tfrac{1}{2}\log c.$$

Es sollen u und v von ξ_1 und η_1 unabhängig sein, so dass die rechte Seite $\Delta z = 0$ genügt. Es muss also sein

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = c\{(x-u)^2 + (y-v)^2\}$$

in der Randcurve. Dies giebt wegen $x^2 + y^2 = R^2$ (R hier Halbmesser des Kreises)

$$R^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2x\xi - 2y\eta = cR^2 + c(u^2 + v^2) - 2xu - 2yv,$$

welcher Gleichung genügt wird durch:

$$u = \frac{\xi}{c}, \quad v = \frac{\eta}{c}, \quad c = \frac{\xi^2 + \eta^2}{R^2},$$

---

*) „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$“, dieses Journal Bd. 59, Art. 1.

woraus folgt:

$$G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = \tfrac{1}{2}\log\left[\left(\xi_1 - \xi\frac{R^2}{\xi^2+\eta^2}\right)^2 + \left(\eta_1 - \eta\frac{R^2}{\xi^2+\eta^2}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2}\log\frac{\xi^2+\eta^2}{R^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\log[R^4 + (\xi^2+\eta^2)(\xi_1^2+\eta_1^2) - 2R^2(\xi\xi_1+\eta\eta_1)] - \tfrac{1}{2}\log R^2.$$

Am ersten dieser Ausdrücke erkennt man die Stetigkeit von G nach ξ_1, η_1, am zweiten die Symmetrie nach ξ, η und ξ_1, η_1.

6.

Das Integral über die Kreisfläche.

Besondere Randcurven, für welche das allgemeine Problem, die Function H in

$$\text{(II.)} \qquad 2\pi z(\xi, \eta) = \int ds z H(x, y; \xi, \eta)$$

zu finden, sich lösen lässt, hat bis jetzt hauptsächlich die Lehre vom Potential und von der Abbildung ergeben. Unter allen bietet die Darstellung von z für die Kreisfläche den grossen Vortheil, dass das *Dirichlet*sche Princip sich in weitestem Umfang bewahrheitet, und dass man an diesem Beispiele mit geringer Mühe feinere Eigenschaften der Integrale von Δu, die wahrscheinlich allgemein sind, studiren kann. Diese schon von mehreren Autoren, u. A. den Herren *Schwarz* und *Prym* und auch von dem Verfasser, behandelte Materie soll in dieser Mittheilung wieder aufgenommen werden.

Der Integration von Δz für die Kreisfläche liegt das particulare Integral $z = (x+iy)^{\pm\mu}$ zu Grunde, welches für $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ sofort das weitere:

$$(Ar^\mu + Br^{-\mu})(C\cos\mu\alpha + D\sin\mu\alpha)$$

liefert, in welchem man für den gegenwärtigen Zweck μ durch $\frac{p\pi}{c}$, C und D durch die Coefficienten der *Fourier*schen Reihe ersetzt, wodurch es wird:

$$(Ar^\mu + Br^{-\mu})\int_0^{2c} d\Theta f(\Theta)\cos\frac{p\pi}{c}(\Theta - \alpha).$$

Statt der Grenzen 0 und $2c$ kann man $-c$ und $+c$ nehmen. Die Grösse $Br^{-\mu}$ liefert das Integral über die Kreisringfläche *), die wir hier nicht betrachten.

---

*) Siehe die in der vor. Anm. cit. Abh. des Herrn *C. Neumann* und die des Herrn *Schwarz*, dieses Journal Bd. 74, pag. 247.

Wir setzen $A = R^{-\mu}$ und bilden das Integral

$$cz = \tfrac{1}{2}\int_0^{2c} d\Theta f(\Theta) + \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{p\pi}{c}} \int_0^{2c} d\Theta f(\Theta) \cos\frac{p\pi}{c}(\Theta-\alpha).$$

Für $c = \pi$ bedeckt es die Kreisfläche einfach, für $c = 2\pi$, 3π, etc. bedeckt es sie zwei-, dreifach u. s. w. mit einem Windungspunkt der ersten, zweiten u. s. w. Ordnung in der Mitte. Am Rande, also für $r = R$, erhält z den Werth $f(\alpha)$. Setzt man $-c$ und $+c$ statt 0 und $2c$, so kann man auf die bekannte Weise zur *Fourier*schen Formel übergehen. Man erhält:

$$\pi z = \int_0^{\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} d\Theta f(\Theta) \left(\frac{r}{R}\right)^{\gamma} \cos\gamma(\Theta-\alpha).$$

Man kann diese Formel auch direct aus dem obigen particulären Integral etwas allgemeiner erhalten:

$$\pi z = \int_0^{\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} d\Theta f(\Theta) \{Ar^{\gamma} + Br^{-\gamma}\} \cos\gamma(\Theta-\alpha),$$

wie sie für die Ringfläche verwendbar ist. Die vorige Formel giebt, $\frac{r}{R} = \varepsilon$ gesetzt:

$$\pi z = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Theta f(\Theta) \frac{l\varepsilon}{(l\varepsilon)^2 + (\Theta-\alpha)^2}.$$

Es lässt sich leicht verificiren, dass für $l\varepsilon = 0$ $(r = R)$ man $z = f(\alpha)$ erhält und zwar für $-\infty < \alpha < +\infty$. Also ist $r = 0$ ein Windungspunkt der Ordnung ∞ der Fläche $z = F(r, \alpha)$, in welchem $z = \frac{1}{2}(f(\infty) + f(-\infty))$ ist. Man kann auch aus diesem Ausdruck einen Windungspunkt beliebiger Ordnung zurückerhalten, indem man $f(\Theta)$ um 2π, 4π, etc. periodisch annimmt, wobei das Integral auf die übliche Weise in das Integral einer Summe sich verwandeln würde, die mit der folgenden der *Fourier*schen Reihe, bevor $r = R$ gesetzt ist, übereinstimmen müsste. Indessen habe ich dies nicht näher untersucht.

Für $c = \pi$ wird die obige Reihe, wenn man sie zunächst schreibt:

$$cz = \int_0^{2c} d\Theta f(\Theta) \left\{\tfrac{1}{2} + \varepsilon^{\frac{\pi}{c}} \cos\frac{\pi}{c}(\Theta-\alpha) + \varepsilon^{\frac{2\pi}{c}} \cos\frac{2\pi}{c}(\Theta-\alpha) + \cdots\right\}$$

in

$$2\pi z = \int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) \frac{1-\varepsilon^2}{1-2\varepsilon\cos(\Theta-\alpha)+\varepsilon^2}$$

übergehen.

Ich werde fortan schreiben

$$H(\varepsilon, \psi) = \frac{1-\varepsilon^2}{1-2\varepsilon\cos\psi+\varepsilon^2},$$

indem das Argument ε ***stets*** <1 ***angenommen wird. Dann ist*** $H(\varepsilon, \psi)$ ***stets endlich und positiv, und es ist:***

$$\int_0^{2\pi} d\Theta H(\varepsilon, \Theta-\alpha) = 2\pi.$$

Hinsichtlich des Kreisflächenintegrals

$$2\pi z = \int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) H(\varepsilon, \Theta-\alpha)$$

ist noch zu bemerken, dass für $\varepsilon = 0$, d. i. im Mittelpunkt des Kreises

$$z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta)$$

ist. Ausserhalb des Kreises ist $\frac{R}{r} < 1$, und setzt man $\varepsilon = \frac{1}{\varrho}$, so wird

$$2\pi z = -\int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) H(\varrho, \Theta-\alpha), \quad 0 < \varrho < 1.$$

Für $r = \infty$, d. i. $\varrho = 0$, ist also:

$$z = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta),$$

und für $r = R$, $\varepsilon = \varrho = 1$ kommt es auf die Reihenfolge an, in welcher man $\varepsilon = 1$ setzt und das Integral bildet, um den Werth von z auf dem Rande zu erhalten *).

7.

Abgekürzte Verification des Integrals über die Kreisfläche.

Bekanntlich hat man auf die Verification von

$$2\pi z = \int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) H(\varepsilon, \Theta-\alpha)$$

und zwar mit Recht einiges Gewicht gelegt, denn eine vollständige Verification liefert, wie ein guter Beweis, die Gültigkeitsgrenzen der Formel.

*) Leipz. Ann. Bd. 7, pag. 257, Anm.

Nun habe ich diese Verification zwar schon vollständig durchgeführt *), dergestalt, dass eine Erweiterung der Gültigkeit der Formel nicht denkbar ist, indem sich zeigte, dass $f(\Theta)$ nur integrirbar zu sein braucht. Indessen finde ich, dass man zu diesem Ergebniss viel kürzer gelangen kann auf folgendem Wege:

Wir benutzen die zwei im vorigen Artikel von $H(\varepsilon, \Theta-\alpha)$ hervorgehobenen Eigenschaften, dass diese Grösse für $\varepsilon < 1$ stets positiv ist und dass:

$$\int_0^{2\pi} d\Theta H(\varepsilon, \Theta-\alpha) = 2\pi.$$

Jedenfalls ist der Limes ($\varepsilon = 1$) dieses Integrals ebenfalls 2π. Zerlegt man es in:

$$\int_0^{\alpha-\delta_1} + \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha+\delta_2} + \int_{\alpha+\delta_2}^{2\pi} = 2\pi,$$

so ist der Limes ($\varepsilon = 1$) der beiden äusseren Integrale links Null, also ist der des mittleren allein 2π.

Zerlegt man dieses in die Integrale

$$\int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\alpha+\delta_2},$$

so hat jedes für sich den Limes $(\varepsilon = 1) = \pi$, weil sie, wenn im zweiten δ_1 statt δ_2 geschrieben wird, ganz gleich sind, und der Limes ($\varepsilon = 1$) von

$$\int_{\alpha+\delta_1}^{\alpha+\delta_2}$$

Null ist.

Da nun $H(\varepsilon, \Theta-\alpha)$ durchweg positiv ist, können wir setzen:

$$\int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) H(\varepsilon, \Theta-\alpha) = \int_0^{\alpha-\delta_1} + \int_{\alpha+\delta_2}^{2\pi} + f(\alpha_1)\int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha} + f(\alpha_2)\int_{\alpha}^{\alpha+\delta_2}.$$

Der Limes der beiden ersten Integrale rechts ist Null, der der beiden folgenden giebt zusammen $\pi\{f(\lim\alpha_1)+f(\lim\alpha_2)\}$, wo

$$\alpha-\delta_1 \leqq \lim\alpha_1 \leqq \alpha-0,$$
$$\alpha+0 \leqq \lim\alpha_2 \leqq \alpha+\delta_2.$$

*) Bulletin des Sciences Mathématiques von ***Darboux***, Bd. III (série 2), p. 343: „Détermination de la valeur-limite d'une intégrale“ etc.

Lässt man nun δ_1 und δ_2 gegen Null abnehmen, so kommt

$$\pi\{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)\}$$

heraus, und die Function $f(\Theta)$ braucht nur integrirbar zu sein.

Ist α bei der Bewegung von ε gegen die Eins ebenfalls beweglich, so wird man, wie dies im *Darboux*schen Bulletin, in dem Eingangs dieses Artikels citirten Aufsatz, Art. V, näher ausgeführt ist, meinen Satz über die gemischten Grenzwerthe zu benutzen haben.

8.

Ueber das Unendlichwerden des Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial N}$ am Rande.

Dass der Differentialquotient $\frac{\partial z}{\partial N} = \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ von

$$2\pi z = \int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) H(\varepsilon, \Theta-\alpha)$$

am Rande in Unstetigkeitsstellen von $f(\Theta)$ unendlich wird, leuchtet ein. Herr *Prym* hat aber an einem Beispiel gezeigt *), dass er auch bei stetigen Functionen in einzelnen Punkten unendlich werden kann, und zwar so, dass das Flächenintegral seines Quadrats unendlich wird. Endlich führt Herr *Schwarz* eine Bemerkung des Herrn *Weierstrass* an **), nach welcher aus der blossen Stetigkeit der Function z auf dem Rande auf die Existenz des Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial N}$ am Rande nicht geschlossen werden kann. Unter solchen Umständen schien es mir von Nutzen, diese Frage bei dem Kreisintegral eingehend zu untersuchen. Man wird dabei auf sehr einfache und übersichtliche Ergebnisse geführt.

Durch Differentiation nach ε von

$$2\pi z = \int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) \frac{1-\varepsilon^2}{1-2\varepsilon\cos(\Theta-\alpha)+\varepsilon^2}$$

findet man:

$$\pi \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) \frac{(1+\varepsilon^2)\cos(\Theta-\alpha)-2\varepsilon}{(1-2\varepsilon\cos(\Theta-\alpha)+\varepsilon^2)^2}.$$

Nun schneiden wir aus dem Integral das Stück von $\alpha-\delta_1$ bis $\alpha+\delta_2$ aus,

*) Dieses Journal Bd. 73, pag. 361.

**) Dieses Journal Bd. 74, pag. 219.

indem wir δ_1 und δ_2 kleiner als α annehmen:

$$\pi \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha+\delta_2} + \int_{0}^{\alpha-\delta_1} + \int_{\alpha+\delta_2}^{2\pi}.$$

Die zwei letzten Integrale rechts geben für $\varepsilon = 1$:

$$\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\alpha-\delta_1} \frac{f(\Theta)d\Theta}{\cos(\Theta-\alpha)-1} + \tfrac{1}{2}\int_{\alpha+\delta_2}^{2\pi} \frac{f(\Theta)d\Theta}{\cos(\Theta-\alpha)-1}.$$

Da zwischen den Grenzen keines dieser Integrale $\Theta = \alpha$ wird, sind beide endlich.

Nun betrachten wir den Ausschnitt:

$$j = \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha+\delta_2} d\Theta f(\Theta) \frac{(\varepsilon^2+1)\cos(\Theta-\alpha)-2\varepsilon}{(1-2\varepsilon\cos(\Theta-\alpha)+\varepsilon^2)^2}.$$

Es wird für $\Theta-\alpha = \Theta_1$

$$j = \int_{-\delta_1}^{+\delta_2} d\Theta_1 f(\Theta_1+\alpha) \frac{(\varepsilon^2+1)\cos\Theta_1-2\varepsilon}{(1-2\varepsilon\cos\Theta_1+\varepsilon^2)^2}.$$

Setzen wir $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, so lässt sich dies Integral so zusammenfassen:

$$j = \int_{0}^{\delta} d\Theta \{f(\alpha+\Theta)+f(\alpha-\Theta)\} \frac{(\varepsilon^2+1)\cos\Theta-2\varepsilon}{(1-2\varepsilon\cos\Theta+\varepsilon^2)^2}.$$

Im Quotienten unter diesem Integral führen wir den halben Winkel Θ ein, indem wir $t = \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}$ und $\gamma = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ setzen. Dies giebt zunächst:

$$d\Theta \frac{(\varepsilon^2+1)\cos\Theta-2\varepsilon}{(1-2\varepsilon\cos\Theta+\varepsilon^2)^2} = \frac{2dt}{(1-\varepsilon)^2} \frac{1-\frac{t^2}{\gamma^2}}{\left(1+\frac{t^2}{\gamma^2}\right)^2},$$

sodann, wenn noch $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = a$ gesetzt wird:

$$\tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)^2 j = \int_{0}^{a} \{f(\alpha+\Theta)+f(\alpha-\Theta)\} \frac{\gamma^2-t^2}{(\gamma^2+t^2)^2} dt,$$

wo unter dem Integral Θ für $2\operatorname{arctg} t$ stehen gelassen ist.

Der Ausdruck rechts, in welchem nun das Nullwerden von γ an die Stelle des Einswerdens von ε tritt, ist zu discutiren, um festzustellen, wie in der Umgebung des Arguments α die Function f beschaffen sein muss, damit der Limes j nach $\gamma = 0$ endlich oder unendlich sei.

Diese Aufgabe erscheint auf den ersten Blick äusserst schwierig.

Doch sie wird wesentlich erleichtert durch den Kunstgriff, den Ausdruck $f(\alpha+\Theta)+f(\alpha-\Theta)$ zu einer zweiten Differenz zu ergänzen.

Aus

$$z_1 = \int_0^{2\pi} d\Theta H(\varepsilon,\ \Theta-\alpha) = 2\pi$$

folgt

$$\frac{\partial z_1}{\partial \varepsilon} = \int_0^{2\pi} d\Theta \frac{\partial H(\varepsilon, \Theta-\alpha)}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Somit wird, da der von 0 bis $\alpha-\delta_1$ und von $\alpha+\delta_2$ bis 2π (also mit Ausschluss des Punktes α) genommene Theil dieses Integrals jedenfalls endlich bleibt, wenn $\varepsilon = 1$ wird, auch der α enthaltende Theil

$$j_0 = \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha+\delta_2}$$

endlich bleiben. Darin setzen wir $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, und er geht durch die obige Transformation über in:

$$\tfrac{1}{4}(1+\varepsilon)^2 j_0 = \int_0^{\alpha} \frac{\gamma^2-t^2}{(\gamma^2+t^2)^2}\, dt.$$

Und wenn man dies mit $2f(\alpha)$ multiplicirt und vom Ausdruck für $\frac{1}{2}(1+\varepsilon)^2 j$ abzieht, so folgt:

$$J = \tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)^2 (j - j_0 f(\alpha)) = \int_0^{\alpha} \{f(\alpha+\Theta)+f(\alpha-\Theta)-2f(\alpha)\} \frac{\gamma^2-t^2}{(\gamma^2+t^2)^2}\, dt.$$

Und dieser Ausdruck lässt sich behandeln. Wir setzen:

$$f(\alpha+\Theta)+f(\alpha-\Theta)-2f(\alpha) = \lambda(\Theta)\Psi(\alpha, \Theta),$$

unter $\lambda(\Theta)$ den „Stetigkeitsgrad zweiter Ordnung“ *) von $f(\Theta)$ verstanden, der monoton mit Θ Null wird, während $\Psi(\alpha, \Theta)$ dabei von ∞ verschieden bleibt und nicht dauernd Null wird. *Wir wollen aber von* $\Psi(\alpha, \Theta)$ *noch voraussetzen, dass es bei Abnahme von* Θ *überhaupt einmal aufhört Null zu werden.* Unser Integral J lautet so:

$$J = \int_0^{\alpha} \lambda(2\operatorname{arctg} t)\, \Psi(\alpha,\ 2\operatorname{arctg} t) \frac{\gamma^2-t^2}{(\gamma^2+t^2)^2}\, dt.$$

---

*) Der Begriff Stetigkeitsgrad ist von mir ausser in früheren Schriften und Aufsätzen des Genaueren erörtert in meinem Aufsatz: „Ueber den Convergenzgrad der variablen Reihen und den Stetigkeitsgrad der Functionen zweier Argumente“, dieses Journal Bd. 100, Art. II. Es handelt sich dort allerdings nur um den Stetigkeitsgrad I. Ordn. (für eine Differenz I. Ordn.), allein das Gesagte ist leicht auf den Stetigkeitsgrad II. Ordn. auszudehnen.

Wir zerlegen es in die beiden Theile:

$$\gamma^2 \int_0^a \lambda(2\operatorname{arctg} t).\Psi.\frac{dt}{(\gamma^2+t^2)^2} \quad \text{und} \quad -\int_0^a \lambda(2\operatorname{arctg} t).\Psi.\frac{t^2\,dt}{(\gamma^2+t^2)^2}$$

und nehmen vor jeden von ihnen einen mittleren Werth von Ψ. Unter Fortlassung dieser einflusslosen mittleren Werthe bleiben zu discutiren die Integrale:

$$\gamma^2 \int_0^a \lambda(2\operatorname{arctg} t)\frac{dt}{(\gamma^2+t^2)^2} \quad \text{und} \quad -\int_0^a \lambda(2\operatorname{arctg} t)\frac{t^2\,dt}{(\gamma^2+t^2)^2}$$

oder, da $\operatorname{arctg} t$ mit t gleich stark unendlich wird, und wenigstens innerhalb der hier zu berücksichtigenden Grenzen daher Gleiches von $\lambda(2\operatorname{arctg} t)$ und $\lambda(t)$ gilt, so handelt es sich schliesslich um die Integrale:

$$\gamma^2 \int_0^a \frac{\lambda(t)\,dt}{(\gamma^2+t^2)^2} \quad \text{und} \quad -\int_0^a \frac{\lambda(t)t^2\,dt}{(\gamma^2+t^2)^2}.$$

Um nun zu sehen, wie diese Integrale bei verschwindendem γ sich verhalten, setzen wir probeweise $\lambda(t) = t$. Dann wird das erste $\frac{1}{2}\frac{a^2}{\gamma^2+a^2}$, giebt also $\frac{1}{2}$ für $\gamma = 0$. Also wird sein Limes überhaupt endlich bleiben, wenn λ wie t oder rascher als t Null wird. Das zweite dagegen wird für $\lambda(t) = t$ und $\gamma = 0$ unendlich, sodass es auf dieses allein ankommt.

Damit es nicht unendlich werde, muss $\lambda(t)$ rascher Null werden als $t\tau(t)$, unter $\tau(t)$ die von mir als Grenze von Convergenz und Divergenz definirte Function *) verstanden, die für diesen Fall dadurch bestimmt ist, dass

$$\int_0^a \frac{\tau_1(t)}{t}\,dt$$

convergirt, wenn $\tau_1(t)$ rascher als $\tau(t)$ Null wird. Es reicht aber völlig aus, die Bedingung für die Endlichkeit von J und j so zu fassen, dass

$$\int_0^a \frac{\lambda(t)}{t^2}\,dt$$

ein convergentes Integral sein müsse.

Somit ergiebt sich der Satz:

Der Limes $(\varepsilon = 1)$ *des Differentialquotienten* $\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ *von*

---

*) „Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls“. Leipz. Ann. XI. Bd., pag. 158.

$$z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) H(\varepsilon, \Theta - \alpha)$$

ist für einen Werth von α *endlich oder unendlich, je nachdem das Integral*

$$\int_0^a \frac{\lambda(t)}{t^2}\, dt$$

convergent oder divergent ist, wenn

$$f(\alpha+t)+f(\alpha-t)-2f(\alpha) = \lambda(t)\Psi(\alpha, t)$$

gesetzt, $\lambda(t)$ *mit* t *monoton verschwindet und von* $\Psi(\alpha, t)$ *angenommen wird, dass diese Grösse bei Abnahme von* t *unter einer endlichen Schranke bleibt und einmal aufhört Null zu werden.*

Die Stärken des Unendlichwerdens von $\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ *und von*

$$\int_0^a \frac{\lambda(t) t^2\, dt}{(\gamma^2+t^2)^2},$$

wenn $\gamma = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ *der Null sich nähert, sind gleich.*

Man kann dieses Unendlich unter verschiedenen Annahmen über λ mit Hülfe des Infinitärcalcüls ausdrücken, um z. B. festzustellen, wie das Quadrat von $\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ sich verhält; doch werde ich hier den Gegenstand nicht weiter verfolgen.

Setzen wir, um zu gewöhnlichen Verhältnissen am Rande überzugehen:

$$f(\alpha+\Theta) = f(\alpha)+\Theta f'(\alpha+0)+\frac{\Theta^2}{2}f''(\alpha+0)+\cdots,$$

$$f(\alpha-\Theta) = f(\alpha)-\Theta f'(\alpha-0)+\frac{\Theta^2}{2}f''(\alpha-0)-\cdots$$

und

$$f(\alpha+\Theta)+f(\alpha-\Theta)-2f(\alpha) = \Theta|f'(\alpha+0)-f'(\alpha-0)|+\Theta^2.\Psi_1,$$

so ist erstens, im Falle $f'(\alpha+0)$ und $f'(\alpha-0)$ ungleich sind, $\lambda(\Theta) = \Theta$; weiter kann $\lambda(\Theta)$ von Θ^2 verschieden sein, wenn $f'(\alpha)$ unendlich ist. Sonst ist $\lambda(\Theta) = \Theta^2$ und das Integral

$$\int_0^a \frac{\lambda(\Theta) d\Theta}{\Theta^2}$$

convergent. Also bietet sich für die Art, wie die Fläche z für $r = R$ in die Randcurve $z = f(\Theta)$ übergeht, folgende Uebersicht:

So lange die Tangente $f'(\Theta)$ ***endlich und eindeutig ist, ist*** $\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ ***endlich. An Stellen, wo*** $f'(\Theta)$ ***unendlich wird, kann es auch*** $\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ ***werden, und an Stellen, wo*** $f'(\Theta)$ ***zwei verschiedene Werthe erhält, ist*** $\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ ***immer unendlich. Wenn also durchweg kein Differentialquotient vorhanden ist, oder er doch in jedem kleinsten Intervall irgendwo fehlt, wird*** $\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ ***durchweg oder doch in jedem kleinsten Intervall irgendwo unendlich werden.***

Hiermit ist bis auf Untergeordnetes das Problem über den Differentialquotienten von z nach der Normale am Rande gelöst unter der über Ψ in

$$f(\alpha+\Theta)+f(\alpha-\Theta)-2f(\alpha) = \lambda(\Theta).\Psi(\alpha, \Theta)$$

gemachten Voraussetzung, dass Ψ bei Abnahme von Θ endliche Schranken einhält und einmal aufhört Null zu werden. Lässt man diese Annahme fallen, so kann der Differentialquotient ins Unbegrenzte schwanken zwischen endlichen oder unendlichen Unbestimmtheitsgrenzen. Wegen der unbekannten Mittelwerthe von Ψ, die wir oben vor die Integrale nahmen, ist sogar nicht ausgeschlossen, dass er auch endlich bleibe, wo er unendlich werden sollte. An dieser Stelle fängt das Problem überhaupt an ungemein verwickelt zu werden, und seine Lösung möchte wohl nur unter weiteren besonderen Annahmen gelingen, die aber, ohne Beziehung zu Anwendungen, vielleicht des Interesses entbehren würden. Es ist ein ganz ähnliches Verhalten, wie bei dem Restproblem der *Fourier*schen Reihe, wo man auch die Lösung ohne Mühe findet, so lange man gewisse Annahmen über die dort auftretende Function Φ macht, welche in den Stetigkeitsgrad erster Ordnung multiplicirt ist, und wo ebenfalls die Verwickelung beginnt, wenn diese Annahmen fallen gelassen werden *).

Es unterliegt kaum einem Zweifel, dass die vorstehenden Resultate über den Grenzwerth $\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ beim Kreise auch für $\frac{\partial z}{\partial N}$ bei beliebiger Randcurve gelten, wo sie allerdings noch für den Fall von solchen Punkten zu vervollständigen wären, in denen sie einen Knick hat. Denkt man sich z. B. einen Kreis, der sonst ganz im Innern der Randcurve verläuft, sie aber in einem Punkt α berührt, d. i. dort mit ihr ein Element ds gemein

*) Dieses Journal, Bd. 100, pag. 346 sqq.

hat, und auf dem Kreis als Ordinaten einer Randfunction construirt *die* Ordinaten der Fläche z, welche zu den Punkten seiner Peripherie gehören; dann wird nach dem *Dirichlet*schen Princip diese Randfunction im Innern des Kreises die nämliche Function z bestimmen, welche dort schon von der Randfunction auf der Randcurve bestimmt ist. Im Berührungspunkte wird aber die zum Kreis gehörige Randfunction mit der ursprünglichen Randfunction die Tangente gemein haben, da eine Berührung erster Ordnung stattfindet; es werden also im Berührungspunkte mit den Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}$ die Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial N}$ endlich und unendlich sein. Diese Betrachtung ist zwar nur ein Aperçu, welches genauerer Durchführung bedarf, aber es verleiht meiner Ansicht von der Allgemeingültigkeit des für den Kreis gefundenen Resultats doch entschieden Wahrscheinlichkeit.

Angenommen nun, die Gültigkeit der obigen Ergebnisse erstrecke sich in der That auf Randcurven im Allgemeinen, so würde sie wohl ohne Einfluss sein auf die Darstellungen von z innerhalb verschiedenartiger Begrenzungen, wie sie u. A. von den Herren *C. Neumann, Weierstrass, Schwarz, Christoffel* gegeben sind, und durch welche gerade der Glaube an die Richtigkeit des *Dirichlet*schen Princips befestigt wird. Denn in der Form

$$2\pi z(\xi, \eta) = \int ds f(s) H(x, y; \xi, \eta),$$

in welcher die bisherigen Lösungen der Gleichung $\Delta z = 0$ enthalten sind, ist der Differentialquotient $\frac{\partial z}{\partial N}$ beseitigt. Dagegen wird die Gültigkeit der Formel

$$2\pi z = \int \left(z \frac{\partial R}{\partial N} - R \frac{\partial z}{\partial N} \right) ds$$

durch das Obige wesentlich beschränkt. Und da scheint es mir gerade besonders nützlich, dass aus den vorstehenden Betrachtungen mit grosser Wahrscheinlichkeit auf die Natur dieser Beschränkungen geschlossen werden kann.

9.

Die verschiedenartigen Randbedingungen für den Kreis.

Zum Schlusse dieser Bemerkungen wollen wir noch das Kreisflächenintegral für andere Bedingungen auf dem Rande als die dort gegebene Function z aufstellen und daran einige allgemeinere Bemerkungen knüpfen.

Aus den Anwendungen folgt, dass das Integral unter Umständen auch bestimmt erscheint durch den Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial N}$ auf dem Rande und durch eine lineare Function von z und $\frac{\partial z}{\partial N}$. Herr ***H. Weber*** hat in einer scharfsinnigen und lehrreichen Abhandlung *) diese Verhältnisse als Variationsproblem aufgefasst und hat es für die allgemeinere Differentialgleichung $\Delta z + x^2 z = 0$ durchgeführt.

Ich will hier einen anderen Weg einschlagen, der in einer Fortsetzung der bisherigen Betrachtungsweise besteht, und auch Verallgemeinerungen, sowohl hinsichtlich der Differentialgleichung als der Randcurve, gestattet. Geht man wieder aus von der particulären Lösung:

$$z = \sum_{p=0}^{p=\infty} \varepsilon^p (A_p \cos p\Theta + B_p \sin p\Theta), \quad \varepsilon = \frac{r}{R},$$

so erhält man zunächst, wenn man für $\varepsilon = 1$ $z = f(\Theta)$ setzt, durch die gewöhnliche *Euler*sche Coefficientenbestimmung, das alte Kreisflächenintegral:

$$\pi z_{r,a} = \int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) \left\{ \tfrac{1}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} \varepsilon^p \cos p(\Theta - \alpha) \right\} = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) H(\varepsilon, \Theta - \alpha).$$

Bildet man aber aus jener particulären Lösung:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{1}{R} \sum_{p=1}^{p=\infty} p\varepsilon^{p-1} \{ A_p \cos p\Theta + B_p \sin p\Theta \}$$

und nimmt $\frac{\partial z}{\partial r}$ als auf dem Rande gegeben und $= f_1(\Theta)$ an, so liefert die *Euler*sche Coefficientenbestimmung zwar die richtigen Werthe für A_p und B_p, allein das Absolutglied fehlt. Indessen sieht man sogleich, von welchem Ansatz man ausgehen muss. Setzt man nämlich:

$$\pi z = R \int_0^{2\pi} d\Theta (f_1(\Theta) + C) \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\varepsilon^p}{p} \cos p(\Theta - \alpha),$$

so ist die rechte Seite eine Lösung von $\Delta z = 0$. Bildet man nun den Differentialquotienten nach r dieser Gleichung und schreibt ihn:

$$\pi \frac{\partial z}{\partial r} = \int_0^{2\pi} d\Theta \{ f_1(\Theta) + C \} \left\{ \tfrac{1}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} \varepsilon^{p-1} \cos p(\Theta - \alpha) \right\} - \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\Theta \{ f_1(\Theta) + C \},$$

---

*) „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$“, Leipz. Ann. Bd. 1, pag. 1.

so folgt für $\varepsilon = 1$:

$$\pi \frac{\partial z}{\partial r} = \pi |f_1(\alpha) + C| - \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\Theta |f_1(\Theta) + C|.$$

Zunächst fällt C heraus, und man behält:

$$\pi \frac{\partial z}{\partial r} = \pi f_1(\alpha) - \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\Theta f_1(\Theta).$$

Nun soll an der Grenze $\frac{\partial z}{\partial r} = f(\alpha)$ gegeben sein, es müsste also $f_1(\alpha)$ so bestimmt werden, dass $\frac{\partial z}{\partial r} = f(\alpha)$ wird. Zum Zwecke dieser Bestimmung hat man die Gleichung

$$f_1(\alpha) - f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Theta f_1(\Theta).$$

Aus ihr folgt, dass $f_1(\alpha)$ von $f(\alpha)$ um eine Constante verschieden ist. Setzt man aber $f_1(\alpha) = f(\alpha) + k$ in diese Gleichung ein, so fällt k heraus und ist unbestimmbar, ausser wenn

$$\int_0^{2\pi} d\Theta f_1(\Theta) = 0.$$

Dann aber ist $f_1(\alpha) = f(\alpha)$.

Somit hat man die Lösung zweiter Art, wenn $\frac{\partial z}{\partial r} = f(\alpha)$ so auf dem Rande gegeben ist, dass $\int_0^{2\pi} f(\Theta) d\Theta = 0$:

$$\pi z = R \int_0^{2\pi} d\Theta |f(\Theta) + C| H_1(\varepsilon, \Theta - \alpha),$$

$$H_1(\varepsilon, \Theta - \alpha) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\varepsilon^p}{p} \cos p(\Theta - \alpha).$$

Man kann ihr indessen auch die Form geben

$$\pi z = R \int_0^{2\pi} d\Theta |\varphi(\Theta) + C| H_1(\varepsilon, \Theta - \alpha),$$

wo

$$\varphi(\Theta) = f(\Theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\Theta) d\Theta$$

sei. Hierin ist $f(\Theta)$ unbeschränkt, da ja von selbst $\int_0^{2\pi} \varphi(\Theta) d\Theta$ verschwindet.

Bei dieser Lösungsform nimmt $\frac{\partial z}{\partial r}$ auf dem Rande den Werth $\varphi(\Theta)$ an.

Ganz ähnlich hat man zu verfahren, wenn man will, dass $az + b\frac{\partial z}{\partial r}$ auf dem Rande in eine gegebene Function $f(\alpha)$ übergehe. Es muss wieder sein $\int_0^{2\pi} d\Theta f(\Theta) = 0$, und man erhält *):

$$\begin{aligned} \pi z &= \int_0^{2\pi} d\Theta \{f(\Theta) + C\} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\varepsilon^p}{a+bp} \cos p(\Theta - \alpha) \\ &= \int_0^{2\pi} d\Theta \{f(\Theta) + C\} H_2(\varepsilon, \Theta - \alpha); \end{aligned}$$

es fällt wieder C heraus, wenn man $az + b\frac{\partial z}{\partial r}$ am Rande bildet.

Die endlichen Werthe von H_1 und H_2 erhält man aus:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varepsilon} &= \tfrac{1}{2}(H_0 - 1), \\ aH_2 + b\varepsilon \frac{\partial H_2}{\partial \varepsilon} &= \tfrac{1}{2}(H_0 - 1). \end{aligned}$$

Die Integration hat von $\varepsilon = 0$ an zu erfolgen und giebt:

$$\begin{aligned} H_1(\varepsilon, \Theta - \alpha) &= -\tfrac{1}{2}\log(1 - 2\varepsilon\cos(\Theta - \alpha) + \varepsilon^2), \\ H_2(\varepsilon, \Theta - \alpha) &= -\frac{\varepsilon^{-\frac{a}{b}}}{2b} \int_0^{\varepsilon} du\, u^{\frac{a}{b}} \frac{d}{du} \log(1 - 2u\cos(\Theta - \alpha) + u^2). \end{aligned}$$

Denkt man sich die drei Integrale in Reihenform, so giebt das erste, bei dem z an der Peripherie vorgeschrieben ist, nach α von 0 bis 2π integrirt:

$$2\pi \int_0^{2\pi} z(r, \alpha)\, d\alpha = \int_0^{2\pi} f(\Theta)\, d\Theta.$$

Die beiden anderen, bei denen $\frac{\partial z}{\partial r}$, resp. $az + b\frac{\partial z}{\partial r}$ gegeben sind, ergeben:

$$\int_0^{2\pi} z(r, \alpha) d\alpha = 0$$

für jedes r.

Endlich ist zu bemerken, dass für eine beliebige Randcurve und eine beliebige Randbestimmung, das über einen beliebigen im Innern der Rand-

*) Wenn um abzukürzen $R = 1$ gesetzt wird, sonst müsste $\frac{b}{R}$ statt b stehen.

curve gelegenen, geschlossenen Weg erstreckte Integral:

$$\int \frac{\partial z}{\partial N} ds = 0$$

ist.

Hiermit sind die drei Integrale mit den drei Grenzbedingungen für die Kreisfläche dargestellt. Man kann die beiden zweiten gegenüber dem ersten so charakterisiren, dass im Falle $az + b\frac{\partial z}{\partial r}$, wo $a = 0$ sein kann, auf dem Rande durch eine gegebene Function dargestellt werden soll, dies auf dem eingeschlagenen Wege nur so möglich ist, dass die Function noch durch eine gewisse von ihr abhängige Constante vermehrt wird. Ginge man weiter, und wollte ein Aggregat der Form

$$az + b\frac{\partial z}{\partial r} + \cdots + g\frac{\partial^n z}{\partial r^n}$$

auf dem Rande darstellen durch eine gegebene Function, so käme dabei heraus, dass diese gegebene Function durch periodische Functionen vermehrt werden muss, deren Coefficienten von ihr abhängen.

Es lassen sich die vorstehenden Betrachtungen ausdehnen auf solche Randcurven, deren Inneres conform auf den Kreis abgebildet werden kann, so zwar, dass die Conformität auch um den Mittelpunkt stattfindet.

Eine viel schwierigere Aufgabe ist die Darstellung von z, wenn an verschiedenen Randstrecken verschiedene Bedingungen vorgeschrieben sind, wenn z. B. im einfachsten Falle von $\alpha = 0$ bis $\alpha = c$, $z = f_0(\alpha)$, von $\alpha = c$ bis $\alpha = 2\pi$, $\frac{\partial z}{\partial r} = f_1(\alpha)$ sein soll.

Setzt man versuchsweise:

$$2\pi z = \int_0^c d\Theta \varphi(\Theta) H_0(\varepsilon, \Theta - \alpha) + R\int_c^{2\pi} d\Theta \psi(\Theta) H_1(\varepsilon, \Theta - \alpha),$$

wo φ und ψ geeignet zu bestimmende Functionen, so soll also für $\varepsilon = 1$ im Intervall $(0 < \alpha_0 < c)$ $z = f_0(\alpha_1)$ und im Intervall $(c < \alpha_1 < 2\pi)$ $\frac{\partial z}{\partial r} = f_1(\alpha_1)$ werden. Dies liefert die Gleichungen für φ und ψ:

$$0 = 2\pi(\varphi(\alpha_0) - f_0(\alpha_0)) - \frac{R}{2}\int_c^{2\pi} d\Theta \psi(\Theta) \log 2(1 - \cos(\Theta - \alpha_0)),$$

$$0 = 2\pi(\psi(\alpha_1) - f_1(\alpha_1)) - \frac{1}{2R}\int_0^c d\Theta \varphi(\Theta) \frac{1}{1 - \cos(\Theta - \alpha_1)}.$$

In beiden Gleichungen kann, ohne dass die Integrale sinnlos werden, α zwischen c und 2π sich bewegen, zwischen 0 und c nur in der oberen.

Ich schrieb diese Gleichungen nicht hin, als ob sie etwa das Problem lösten oder doch der Lösung näher führten, sie sollten nur ein Beispiel unter zahllosen sein, dafür, dass man bei Randproblemen der linearen partiellen Differentialgleichungen beständig vor dieselbe Gattung von Aufgaben gestellt wird, welche jedoch, wie es scheint, für die heutige Analysis im Allgemeinen unüberwindliche Schwierigkeiten darbieten. Ich meine die zweckmässig ***Integralgleichungen*** zu nennenden Aufgaben, welche darin bestehen, dass die zu bestimmende Function, ausser ihrem sonstigen Vorkommen, in ihnen unter bestimmten Integralen enthalten ist, welche ausser den Integrationsvariabeln noch andere enthalten, die eigentlichen Argumente der Gleichungen, wie vorstehend α_0 und α_1. Eine einfache Form dieser Integralgleichungen, die viele besonderen Fälle umfasst, ist:

$$\int_0^s ds f(s)\varphi(s, x) = \psi(x).f(x)+\chi(x)$$

zur Bestimmung von $f(x)$. φ, ψ, χ sind als bekannt zu denken. Aber es können wie im obigen Beispiele auch simultane Integralgleichungen für unsere Function vorgelegt sein. Eine einfache Integralgleichung für $\frac{\partial z}{\partial N}$ erhält man z. B., wenn man in

$$2\pi z = \int ds\left(z\frac{\partial R}{\partial N} - R\frac{\partial z}{\partial N}\right)$$

mit z an die Oberfläche geht. Dann kommt die Unbekannte $\frac{\partial z}{\partial N}$ ausserhalb des Integrals gar nicht vor. Hier ist allerdings noch auf das Unendlichwerden der R und $\frac{\partial R}{\partial N}$ in dem Punkt der Randcurve zu achten, in welchen z eintritt. Doch werde ich noch viele solche Integralgleichungen, namentlich bei anderen partiellen Differentialgleichungen, aufzustellen Gelegenheit finden. Auf diese Aufgaben wurde ich zuerst durch meinen Freund ***Adolph Fick,*** den Würzburger Physiologen, aufmerksam gemacht, der, als wir vor mehr als 35 Jahren in Zürich zusammen arbeiteten, die Bemerkung machte, dass die Bestimmung von Dichtigkeiten, die von inneren Kräften der Substanz abhängen, vielfach darauf führt. Die Integralgleichungen sind mir seitdem in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen so

oft vorgekommen, dass ich überzeugt bin, die Fortschritte dieser Theorie seien an die der Behandlung der Integralgleichungen gebunden, über die aber so gut wie nichts bekannt ist. Weder die Frage, wie weit das Problem ein bestimmtes sei, noch seine Klassification, da es doch an das Problem der Differenzengleichungen sich anzuschliessen scheint, sind, so viel ich weiss, bis jetzt erörtert worden.

Es beeinträchtigt die Allgemeinheit dieser Gattung von Aufgaben übrigens durchaus nicht, wenn, wie mich dünkt, das obige Problem der streckenweise verschiedenartigen Grenzbedingungen noch von einer ganz anderen Seite her in Angriff genommen werden kann, worauf ich bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen werde.

Die obigen drei Arten von Grenzbedingungen lassen sich auf beliebige Randcurven ausdehnen, und liefern dann elegante Formeln. Allein die merkwürdigen, bei dem Kreis hervortretenden Beschränkungen sind im allgemeinen Falle nicht so deutlich festzustellen, obwohl unzweifelhaft vorhanden. Aus diesem Grunde werde ich es mir gegenwärtig versagen, die allgemeinen Sätze abzuleiten.

Berlin, im October 1887.

Druckfehler.

S. 214, Zeile 15 lese man $z = f(\alpha)$ statt $z = f(\varphi)$.

Ueber die Darstellung der Zahlen eines Gattungsbereiches für einen beliebigen Primdivisor.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

In einer früheren Arbeit (dieses Journal Bd. 101) habe ich die ganzen algebraischen Zahlen eines beliebigen Gattungsbereiches (G) für irgend einen Primdivisor (P) einer reellen Primzahl p untersucht und dargelegt, dass dieselben sämmtlich ganzzahligen Congruenzen eines ganz bestimmten Grades $\varkappa$ genügen, welche, modulo P oder, was dasselbe ist, modulo p betrachtet, entweder selbst irreductibel oder Potenzen von irreductibeln ganzzahligen Functionen sind.

Ist nämlich w irgend eine Zahl dieses Bereiches und $F(w)$ die ganzzahlige Function des $\varkappa$ten Grades, deren Congruenzwurzel sie modulo P ist, so sind die $\varkappa$ Zahlen:

$$(1.) \qquad w,\ w^p,\ w^{p^2},\ \ldots\ w^{p^{\varkappa-1}},$$

die sämmtlichen Wurzeln der Congruenz:

$$(2.) \qquad F(w) \equiv 0 \pmod{P},$$

und die Function $F(w)$ ist dann, modulo p betrachtet, irreductibel, wenn die $\varkappa$ conjugirten Zahlen (1.) modulo P sämmtlich incongruent sind.

Es giebt stets eine ganz bestimmte Anzahl von Zahlen, für welche diese Voraussetzung erfüllt ist. Ist x eine derselben und

$$(3.) \qquad f(x) = x^\varkappa + A_1 x^{\varkappa-1} + A_2 x^{\varkappa-2} + \cdots + A_\varkappa$$

die ganzzahlige Function, deren Congruenzwurzel modulo P sie ist, so lässt sich jede Zahl des Bereiches (G) modulo P auf eine und nur auf eine Weise als ganze ganzzahlige Function des $(\varkappa-1)$ten Grades von x darstellen. Die Untersuchung der Zahlen des Bereiches (G) reducirt sich somit auf die Betrachtung aller ganzen ganzzahligen Functionen von x für das irreductible Modulsystem $(p, f(x))$.

Wie a. a. O. gezeigt worden ist, bilden $\varkappa$ Functionen $w_1, w_2, \ldots w_\varkappa$ von x dann und nur dann ebenso wie die Functionen $1, x, x^2, \ldots x^{\varkappa-1}$ für das Modulsystem $(p, f(x))$ ein Fundamentalsystem, wenn die aus ihnen und ihren conjugirten Functionen gebildete Determinante:

$$\left| w_\alpha^{p^\beta} \right| \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots \varkappa \\ \beta = 0, 1, \ldots \varkappa-1 \end{pmatrix}$$

das Modulsystem $(p, f(x))$ nicht enthält.

Es liegt nun sehr nahe zu fragen, ob nicht stets $\varkappa$ *conjugirte* Functionen

$$w, \quad w^p, \quad \ldots \quad w^{p^{\varkappa-1}}$$

existiren, welche in dem vorher angegebenen Sinne für den Gattungsbereich (G) und den Modul P ein Fundamentalsystem bilden. Nach den obigen Auseinandersetzungen ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür die, dass die Determinante $\varkappa$ter Ordnung:

$$(4.) \qquad D(w) = \left| w^{p^\varrho + \sigma} \right| \qquad (\varrho, \sigma = 0, 1, \ldots \varkappa-1)$$

das Primmodulsystem $(p, f(x))$ nicht enthält, dass also der Divisor:

$$(4^a.) \qquad \left(\left| w^{p^\varrho + \sigma} \right|, \quad p, f(x) \right)$$

äquivalent Eins ist. Eine jede Zahl w, welche dieser Bedingung genügt, soll eine Fundamentalzahl für die Gattung (G) und den Divisor P genannt werden. Ist erst nachgewiesen, dass für jedes Divisorensystem $(p, f(x))$ eine Fundamentalzahl w existirt, so ist es leicht, einen Ausdruck für die Gesammtanzahl $A_\varkappa$ derselben zu finden. Da nämlich unter dieser Voraussetzung für eine jede Function w_1 von x eine ganzzahlige Congruenz

$$w_1 \equiv u_0 w + u_1 w^p + \cdots + u_{\varkappa-1} w^{p^{\varkappa-1}} = \sum_{\alpha=0}^{\varkappa-1} u_\alpha w^{p^\alpha} \pmod{(p, f(x))}$$

besteht, so erhält man, indem man die obige Congruenz wiederholt zur $p$ten Potenz erhebt, für die zu w_1 conjugirten Functionen die folgenden Darstellungen:

$$(5.) \qquad w_1^{p^\delta} \equiv \sum_{\alpha=0}^{\varkappa-1} u_\alpha w^{p^{\alpha+\delta}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\varkappa-1} u_{\alpha-\delta} w^{p^\alpha} \qquad (\delta = 0, 1, \ldots \varkappa-1),$$

wo hier sowohl als im Folgenden die Indices und Exponenten modulo $\varkappa$ auf den kleinsten positiven Rest reducirt anzunehmen sind; und hieraus folgt endlich, dass die $\varkappa$ Zahlen $w_1, w_1^p, \ldots w_1^{p^{\varkappa-1}}$ dann und nur dann ein Fundamentalsystem bilden, wenn die Substitutionsdeterminante der Congruenzen (5.) durch die Primzahl p nicht theilbar ist. Die gesuchte Anzahl $A_\varkappa$ ist also

entweder gleich Null, oder gleich der Anzahl der ganzzahligen Werthsysteme der Unbestimmten $u_0, \ldots u_{\varkappa-1}$, welche der Bedingung

$$(6.) \qquad |u_{a+\delta}| \gtrless 0 \pmod{p} \qquad (a, \delta = 0, 1, \ldots \varkappa-1)$$

oder, was dasselbe ist, der Bedingung

$$(6^a.) \qquad (|u_{a+\delta}|, p) \sim 1$$

genügen. Im Folgenden soll einmal gezeigt werden, dass die erste Annahme niemals eintritt, und ferner soll die Zahl $A_\varkappa$, welche dann nur von der Primzahl p und dem *Grade* von $f(x)$ abhängt, wirklich berechnet werden. Der Satz, dass für eine jede Gattung und einen jeden Primdivisor mindestens eine Fundamentalzahl existirt, lässt sich leicht auf einen specieller gefassten von *Eisenstein* zurückführen, welchen derselbe im 39. Bande dieses Journals S. 182 ausgesprochen, meines Wissens aber nirgends bewiesen hat. Auf die Bestimmung der Anzahl $A_\varkappa$ der Fundamentalzahlen wird in der angeführten Notiz ebenfalls nicht eingegangen.

Die Bedingung $(4^a.)$ dafür, dass eine Function w eine Fundamentalzahl für die Gattung G und den Divisor P ist, lässt sich noch umformen: Man kann nämlich zeigen, dass sie dann und nur dann erfüllt ist, wenn das Modulsystem:

$$(7.) \qquad (w + \alpha w^p + \cdots + \alpha^{\varkappa-1} w^{p^{\varkappa-1}},\ p,\ f(x),\ \alpha^\varkappa - 1)$$

äquivalent Eins, also kein eigentliches Modulsystem ist.

Ist dies nämlich der Fall, so erhält man, wenn man α^δ für α setzt und beachtet, dass $\alpha^{\delta\varkappa}-1$ durch $\alpha^\varkappa - 1$ für ein ganzzahliges δ theilbar ist:

$$(w + \alpha^\delta w^p + \cdots + \alpha^{\delta(\varkappa-1)} w^{p^{\varkappa-1}},\ p,\ f(x),\ \alpha^\varkappa - 1) \sim 1 \qquad (\delta = 1, \ldots \varkappa),$$

und hieraus ergiebt sich weiter:

$$\Big(\prod_{\delta=1}^{\varkappa}(w + \alpha^\delta w^p + \cdots + \alpha^{\delta(\varkappa-1)} w^{p^{\varkappa-1}}),\ p,\ f(x),\ \alpha^\varkappa - 1\Big) \sim 1.$$

Diese Aequivalenz besteht a fortiori, wenn man an Stelle von $\alpha^\varkappa - 1$ denjenigen irreductibeln Divisor $F_\varkappa(\alpha)$ dieser Function setzt, welcher in keinem ihrer Theiler zugleich enthalten ist. Beachtet man aber dann, dass bekanntlich:

$$\prod_{\delta=1}^{\varkappa}(w + \alpha^\delta w^p + \cdots + \alpha^{\delta(\varkappa-1)} w^{p^{\varkappa-1}}) \equiv D(w) \pmod{F_\varkappa(\alpha)}$$

ist, so ergiebt sich:

$$(D(w),\ p,\ f(x),\ F_\varkappa(\alpha)) \sim 1,$$

und da die drei ersten Elemente α garnicht enthalten, so bleibt diese Aequivalenz bestehen, wenn man $F_z(\alpha)$ fortlässt.

Da die Determinante $D(w)$ den Divisor (7.) enthält, wie man durch eine einfache Umformung derselben ohne Schwierigkeit erkennt, so ergiebt sich, dass die obige Bedingung auch nothwendig ist.

Es möge nun die Primzahl p zuerst nicht in z enthalten sein. Die Zerlegung von α^z-1 in irreductible Factoren ergebe dann:

$$\alpha^z-1 = \prod_{d|z} F_d(\alpha),$$

wo sich die Multiplication über alle Theiler d von z erstreckt und allgemein $F_d(\alpha)$ vom Grade $\varphi(d)$ ist. Da unter der soeben gemachten Voraussetzung die Functionen $F_d(\alpha)$ einander, auch modulo p betrachtet, theilerfremd sind, so ergiebt sich aus (7.) die Bedingung:

$$(\psi(\alpha),\ p,\ f(x),\ \alpha^z-1) \sim \prod_{d|z}(\psi(\alpha),\ p,\ f(x),\ F_d(\alpha)) \sim 1,$$

wo zur Abkürzung

$$\psi(\alpha) = w+\alpha w^p+\cdots+\alpha^{z-1}w^{p^{z-1}}$$

gesetzt ist.

Es sei nun endlich ν_d der Exponent, zu dem p für den Divisor d von z gehört. Alsdann zerfällt die irreductible Function $F_d(\alpha)$, modulo p betrachtet, noch in $\frac{\varphi(d)}{\nu_d}$ irreductible ganzzahlige theilerfremde Factoren, welche beziehlich durch:

$$(8.) \qquad g_{d\varrho}(\alpha) \qquad \left(\varrho = 1, 2, \ldots \frac{\varphi(d)}{\nu_d}\right)$$

bezeichnet werden mögen. Die obige Bedingung verwandelt sich dann in:

$$(9.) \qquad \prod_{d|z}(\psi(\alpha), p, f(x), F_d(\alpha)) \sim \prod_{d|z}\prod_{\varrho=1}^{\frac{\varphi(d)}{\nu_d}}(\psi(\alpha), p, f(x), g_{d\varrho}(\alpha)) \sim 1.$$

Beachtet man endlich, dass die Modulsysteme $(p,\ f(x),\ g_{d\varrho}(\alpha))$ prim sind, so sind die letzten Bedingungen äquivalent mit den folgenden:

$$(9^a.) \qquad \psi(\alpha) = w+\alpha w^p+\cdots+\alpha^{z-1}w^{p^{z-1}} \gtrless 0 \pmod{(p,\ f(x),\ g_{d\varrho}(\alpha))}.$$

Da die Congruenz:

$$\psi(\alpha) = \alpha^{z-1}w^{p^{z-1}}+\alpha^{z-2}w^{p^{z-2}}+\cdots+w \equiv 0 \pmod{(p,\ f(x),\ g_{d\varrho}(\alpha))}$$

in w nur vom p^{z-1}ten Grade ist, so ist es für einen jeden Modul stets möglich, unter den p^z incongruenten Functionen w von x mindestens eine $w_{d\varrho}$

so zu finden, dass die Resolvente

$$(10.) \qquad \psi_{d\varrho}(\alpha) = \sum_{\delta=0}^{\varkappa-1} \alpha^{\delta} w_{d\varrho}^{p^{\delta}}$$

den Primmodul $(p, f(x), g_{d\varrho}(\alpha))$ nicht enthält.

Dann ergiebt sich aus der Gestalt jener Resolvente unmittelbar die Congruenz:

$$(10^a.) \qquad \alpha^p(\psi_{d\varrho}(\alpha))^p - \psi_{d\varrho}(\alpha^p) \equiv 0 \pmod{(p, f(x), g_{d\varrho}(\alpha))}.$$

Man denke sich nun für jeden Primdivisor $(p, f(x), g_{d\varrho}(\alpha))$ eine der vorhin gestellten Anforderung genügende Function $w_{d\varrho}$ bestimmt und bilde diejenige Function von x und α:

$$(11.) \qquad \chi(x, \alpha) \equiv w_1 + w_2\alpha + \cdots + w_\varkappa \alpha^{\varkappa-1} \pmod{(p, f(x), \alpha^\varkappa - 1)},$$

welche durch die Congruenzen:

$$(12.) \qquad \chi(x, \alpha) \equiv \psi_{d\varrho}(\alpha) \pmod{(p, f(x), g_{d\varrho}(\alpha))}$$

eindeutig bestimmt ist, so werden die mit $w_1, \ldots w_\varkappa$ bezeichneten Coefficienten in (11.) ebenso vielen, modulis $(p, f(x))$ conjugirten Functionen congruent sein, welche für diesen Divisor ein Fundamentalsystem bilden. In der That genügt nämlich $\chi(x, \alpha)$ der Congruenz:

$$\alpha^p \chi(\alpha)^p - \chi(\alpha^p) \equiv 0 \pmod{(p, f(x), \alpha^\varkappa - 1)},$$

da diese nach (12.) und (10^a.) für einen jeden Primdivisor $(p, f(x), g_{d\varrho}(\alpha))$ besteht. Setzt man aber für $\chi(\alpha)$ und $\chi(\alpha^p)$ ihre Werthe aus (11.), so ergiebt sich:

$$(w_\varkappa^p - w_1) + \alpha(w_1^p - w_2) + \cdots + \alpha^{\varkappa-1}(w_{\varkappa-1}^p - w_\varkappa) \equiv 0 \pmod{(p, f(x), \alpha^\varkappa - 1)},$$

eine Congruenz, welche dann und nur dann erfüllt ist, wenn

$$w_1^p \equiv w_2, \quad w_2^p \equiv w, \quad \ldots \quad w_\varkappa^p \equiv w_1 \pmod{(p, f(x))}$$

ist, oder wenn die $\varkappa$ Functionen $w_1, \ldots w_\varkappa$ den zu w_1 conjugirten

$$w_1, \quad w_1^p, \quad \ldots \quad w_1^{p^{\varkappa-1}}$$

congruent sind.

Da ferner wegen (10.) und (12.) die Aequivalenz besteht:

$$(\chi(x, \alpha), p, f(x), \alpha^\varkappa - 1) \sim \prod_d \prod_\varrho (\chi(x, \alpha), p, f(x), g_{d\varrho}(\alpha)) \sim 1,$$

so ist unter der Voraussetzung, dass $\varkappa$ durch die Primzahl p nicht theilbar ist, die Existenz einer Fundamentalzahl nachgewiesen, und man besitzt eine Methode, um sie stets zu bestimmen.

Der allgemeine Fall, dass $\varkappa$ die Primzahl p beliebig oft enthält, lässt sich in einfacher Weise auf den soeben betrachteten zurückführen. Sei nämlich:

$$\varkappa = p^\lambda \varkappa_1,$$

wo p^λ die höchste in $\varkappa$ enthaltene Potenz von p bedeutet. Alsdann verwandelt sich die vorher gefundene Bedingung dafür, dass die Function w von x nebst ihren Conjugirten für die Gattung G der Ordnung $\varkappa$ ein Fundamentalsystem bildet, in die folgende:

$$(\psi(\alpha),\ p,\ f(x),\ \alpha^{\varkappa}-1) \sim (\psi(\alpha),\ p,\ f(x),\ (\alpha^{\varkappa_1}-1)^{p^\lambda}) \sim 1,$$

oder was dasselbe ist, in

$$(13.) \qquad (\psi(\alpha),\ p,\ f(x),\ \alpha^{\varkappa_1}-1) \sim 1.$$

Reducirt man jetzt die Resolvente $\psi(\alpha)$ modulis $(p,\ f(x),\ \alpha^{\varkappa_1}-1)$ auf ihren einfachsten Ausdruck, so ergiebt sich:

$$\psi(\alpha) = \sum_{\varrho=0}^{\varkappa-1} \alpha^\varrho w^{p^\varrho} \equiv \sum_{\mu=0}^{p^\lambda-1} \sum_{\varrho_1=0}^{\varkappa_1-1} \alpha^{\mu\varkappa_1+\varrho_1} w^{p^{\mu\varkappa_1+\varrho_1}} \equiv \sum_{\varrho_1=0}^{\varkappa_1-1} \alpha^{\varrho_1} \Big(\sum_{\mu=0}^{p^\lambda-1} w^{p^{\mu\varkappa_1}}\Big)^{p^{\varrho_1}}$$
$$(\mathrm{modd.}\ (p,\ f(x),\ \alpha^{\varkappa_1}-1)),$$

oder wenn zur Abkürzung

$$(14.) \qquad \sum_{\mu=0}^{p^\lambda-1} w^{p^{\mu\varkappa_1}} = w_1$$

gesetzt wird:

$$(14^a.) \qquad \psi(\alpha) \equiv \sum_{\varrho_1=0}^{\varkappa_1-1} \alpha^{\varrho_1} w_1^{p^{\varrho_1}} = \psi_1(\alpha) \quad (\mathrm{modd.}\ (p,\ f(x),\ \alpha^{\varkappa_1}-1)).$$

Die Bedingung dafür, dass w eine Fundamentalzahl für die Ordnung $\varkappa$ wird, ist mithin die, dass für die mit w durch (14.) verbundene Function w_1 die Aequivalenz

$$(15.) \qquad (\psi_1(\alpha),\ p,\ f(x),\ \alpha^{\varkappa_1}-1) \sim 1$$

besteht, dass mithin die Function w_1 für die Ordnung $\varkappa_1$ eine Fundamentalzahl ist. Da $\varkappa_1$ p nicht mehr enthält, so ist es, im Wesentlichen nach der vorher gegebenen Methode, stets möglich, eine solche Function w_1 zu finden. Dann kann man aber unter den $p^\varkappa$ incongruenten Functionen von x stets eine solche finden, dass der Bedingung (14.), nämlich:

$$(15^a.) \qquad G(w) = (\Sigma w^{p^{\mu\varkappa_1}}) - w_1 \equiv 0 \quad (\mathrm{modd.}\ (p,\ f(x)))$$

genügt werde. Berücksichtigt man nämlich, dass w_1 der Congruenz:

$$(16.) \qquad w_1^{p^{\varkappa_1}} - w_1 \equiv 0 \quad (\mathrm{modd.}\ (p,\ f(x)))$$

genügt, so ergiebt sich aus (14.) unmittelbar die Congruenz:

$$(17.) \qquad (G(w))^{p^{\varkappa_1}} - G(w) = G(w)(G(w)^{p^{\varkappa_1}-1}-1) \equiv w^{p^\varkappa} - w \quad (\mathrm{modd.}\ (p,\ f(x))).$$

Da also die Function $G(w)$ modulis $(p, f(x))$ ein Divisor von $(w^{p^z}-w)$ ist, so theilt sie mit jener die Eigenschaft, so viele Linearfactoren zu haben, als ihr Grad angiebt; es ist daher stets möglich, w den gestellten Anforderungen gemäss zu bestimmen. Der Satz ist somit allgemein bewiesen.

Es wäre einfach, mit Hülfe der soeben abgeleiteten Resultate auch zugleich die *Anzahl* der Fundamentalzahlen zu bestimmen. Da diese Anzahl A_z aber nach (6.) mit derjenigen der Systeme ganzer Zahlen $u_0, \ldots u_{z-1}$ zusammenfällt, für welche:

$$|u_{\varrho+\sigma}| \leqq 0 \pmod{p} \qquad (\varrho, \sigma = 0, 1, \ldots z-1)$$

ist, und da diese Zahl häufig auch in anderem Zusammenhange auftritt, so soll sie noch direct mit den hier gegebenen Methoden gefunden werden. Es sind also die ganzzahligen Werthsysteme zu bestimmen, für welche

$$(18.) \qquad (|u_{\varrho+\sigma}|, p) \sim 1,$$

oder was dasselbe ist, für welche:

$$(19.) \qquad \Big(\sum_{\varrho=0}^{z-1} u_\varrho \alpha^\varrho, p, \alpha^z-1\Big) \sim (\psi(\alpha), p, \alpha^z-1) \sim 1$$

ist. Bei denselben Bestimmungen über z, wie sie im zweiten Theile dieser Arbeit angenommen wurden, ergiebt sich hieraus die einfachere Bedingung:

$$(19^a.) \qquad \Big(\sum_{\delta=0}^{z-1} u_\varrho \alpha^\varrho, p, \alpha^{z}-1\Big) \sim \Big(\sum_{\varrho_1=0}^{z_1-1} U_{\varrho_1} \alpha^{\varrho_1}, p, \alpha^{z_1}-1\Big) \sim 1,$$

wo $U_0, \ldots U_{z_1-1}$ ganze Zahlen sind, welche mit $u_0, \ldots u_{z-1}$ durch die Gleichungen:

$$(20.) \qquad \sum_{\mu=0}^{p^\lambda-1} u_{\mu z_1+\varrho_1} = U_{\varrho_1} \qquad (\varrho_1 = 0, \ldots z_1-1)$$

zusammenhängen. Zerlegt man jetzt den Divisor (19^a.) in seine irreductibeln Factoren, so ergiebt sich

$$(21.) \quad (\Sigma U_{\varrho_1} \alpha^{\varrho_1}, p, \alpha^{z_1}-1) \sim \prod_{d \mid z_1} \prod_r \Big(\sum_{\varrho_1=0}^{z_1-1} U_{\varrho_1} \alpha^{\varrho_1}, p, g_{dr}(\alpha)\Big) \sim 1 \quad \Big(r = 1, 2, \ldots \frac{\varphi(d)}{\nu_d}\Big).$$

Bedeuten die U ganze Zahlen, so genügt

$$\psi_1(\alpha) \equiv \sum_{\varrho_1=0}^{z_1-1} U_{\varrho_1} \alpha^{\varrho_1}$$

für unbestimmte U der Congruenz:

$$(22.) \qquad \psi_1^{p^{\nu_d}} - \psi_1 = \psi_1(\psi_1^{p^{\nu_d}-1}-1) \equiv 0 \pmod{(p, g_{dr}(\alpha))}.$$

Es ist also:

$$(23.) \quad (p, g_{dr}(\alpha)) \sim (\psi_1^{p^{\nu_d}}-\psi_1, p, g_{dr}(\alpha)) \sim (\psi_1, p, g_{dr}(\alpha))(\psi_1^{p^{\nu_d}-1}-1, p, g_{dr}(\alpha)).$$

Die Bedingungen (21.) sind also dann und nur dann erfüllt, wenn für jedes Werthsystem (d, r) die Aequivalenz:

$$(24.) \qquad (\psi^{p^{\nu_d}-1}-1,\ p,\ g_{dr}(\alpha)) \sim (p,\ g_{dr}(\alpha))$$

besteht. Da die Congruenz (22.) ebenso viele incongruente Lösungen besitzt, als ihr Grad angiebt, so giebt es auch genau $p^{\nu_d}-1$ Werthe von ψ_1, welche der Aequivalenz (24.) genügen. Berücksichtigt man endlich, dass durch diejenigen Werthe, welche $\psi_1(\alpha)$ modulis $(p, g_{dr}(\alpha))$ annimmt, $\psi_1(\alpha)$ und damit auch die ganzzahligen Coefficienten $U_0, \ldots U_{\varkappa_1-1}$ modulo p eindeutig bestimmt sind, so ergiebt sich für die Anzahl $A_{\varkappa_1}$ der Zahlen U der folgende Ausdruck:

$$(25.) \qquad A_{\varkappa_1} = \prod_{d|\varkappa_1} \prod_{r} (p^{\nu_d}-1) = \prod_{d|\varkappa_1} (p^{\nu_d}-1)^{\frac{\varphi(d)}{\nu_d}},$$

wo d alle Theiler von $\varkappa_1$ durchläuft und allgemein ν_d der Exponent ist, zu dem p modulo d gehört.

Aus (20.) ergiebt sich endlich, dass jedem Werthsysteme $U_0, \ldots U_{\varkappa_1-1}$ genau $p^{\varkappa-\varkappa_1}$ Werthsysteme von $u_0, \ldots u_{\varkappa-1}$ entsprechen, da in den $\varkappa_1$ Congruenzen (20.) immer je $p^{\lambda}-1$ Grössen u völlig willkürlich angenommen werden können und durch sie die letzte eindeutig bestimmt ist. Ist also $A_\varkappa$ die Anzahl der Lösungen der Aequivalenz (18.) oder die Anzahl der Fundamentalzahlen für die Ordnung $\varkappa$, so ist ganz allgemein:

$$(26.) \qquad A_\varkappa = p^{\varkappa-\varkappa_1} A_{\varkappa_1} = p^{\varkappa-\varkappa_1} \prod_{d|\varkappa_1} (p^{\nu_d}-1)^{\frac{\varphi(d)}{\nu_d}},$$

wo jetzt $\varkappa_1$ den grössten p nicht enthaltenden Theiler von $\varkappa$ bedeutet.

Ist $\varkappa$ kleiner als p, so lässt sich die ***Existenz*** von Fundamentalzahlen viel einfacher erweisen, als dies hier geschehen ist; indessen ist der hier gegebene Beweis jenem anderen vorzuziehen, weil er einmal das Problem völlig löst, ferner ein brauchbares Verfahren zur Bestimmung der Fundamentalzahlen liefert, und weil er endlich auch ihre Anzahl finden lässt.

Benutzt man bei der Untersuchung der Zahlen eines Gattungsbereiches für einen Primdivisor ein System conjugirter Fundamentalzahlen als Fundamentalsystem, so lassen sich einige von den in der vorher erwähnten Arbeit abgeleiteten Sätzen, wie ich an einer anderen Stelle zeigen werde, fast ohne alle Rechnung beweisen.

Berlin, im December 1887.

Ueber eine specielle Klasse linearer Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Hamburger*.)

In dem 100. Bande dieses Journals p. 286 ff. hat Herr ***Cayley*** eine Untersuchung veröffentlicht, betreffend die Theorie derjenigen irregulären Integrale linearer Differentialgleichungen, die Herr ***Thomé*** unter dem Namen „Normalintegrale“ eingeführt hat. Die Ausdrücke, zu denen er für diese Integrale gelangt, enthalten unendliche Reihen, deren Convergenz nicht geprüft wird, und insoweit dürften die gewonnenen Resultate nicht als sichergestellt zu erachten sein. Während nun im Allgemeinen uns eine Controlle darüber fehlt, gelingt es für eine besondere Klasse von Gleichungen, die durch die Eigenschaft ausgezeichnet sind, dass sie nur einen singulären Punkt im Endlichen besitzen, während im Unendlichen sich sämmtliche Integrale regulär verhalten, die wahre Form der Integrale in der Umgebung des singulären Punktes festzustellen. Diese lässt dann die Bedingung erkennen, auf welche die Gültigkeit der Resultate des Herrn ***Cayley***, wenigstens soweit sie die gedachte specielle Klasse von Gleichungen betreffen, eingeschränkt ist.

1.

Wir zeigen dies zunächst an dem von Herrn ***Cayley*** zur Durchführung der erforderlichen Rechnungen gewählten Beispiele

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\alpha}{x^4} + \frac{\beta}{x^3} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x} + \varepsilon\right)y,$$

worin wir, damit diese Gleichung zur genannten Klasse gehört, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ setzen, was für die Form der a. a. O. gegebenen Lösung, die wir weiter unten folgen lassen, ohne Belang ist. Wir betrachten also die Gleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\alpha}{x^4} + \frac{\beta}{x^3} + \frac{\gamma}{x^2}\right)y.$$

In dieser ist offenbar $x = 0$ der einzige singuläre Punkt im Endlichen, und setzt man $x = \frac{1}{t}$, so geht die Gleichung (1.) über in die Gleichung

$$(2.) \qquad t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t \frac{dy}{dt} = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma) y,$$

deren Form nach dem fundamentalen Satz des Herrn *Fuchs* uns anzeigt, dass sie in der Umgebung von $t = 0$ $(x = \infty)$ lauter reguläre Integrale besitzt, wie auch α, β, γ beschaffen sein mögen. Die zu $t = 0$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung lautet

$$r(r+1) = \gamma.$$

Ihre Wurzeln sind

$$r_1 = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + \gamma}, \quad r_2 = -\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} + \gamma}.$$

Wenn also $4\gamma + 1$ nicht das Quadrat einer reellen ganzen Zahl ist, so gehört zu dem Punkt $t = 0$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Form

$$y_1 = t^{r_1} \mathfrak{P}_1(t), \quad y_2 = t^{r_2} \mathfrak{P}_2(t),$$

wo $\mathfrak{P}_1(t)$ und $\mathfrak{P}_2(t)$ eindeutige Functionen in der Umgebung des Punktes $t = 0$ bedeuten, die für $t = 0$ nicht verschwinden. Da die Gleichung (2.) ausser diesem Punkte keinen singulären Punkt im Endlichen hat, so reicht die gedachte Umgebung über die ganze t-Ebene, den Unendlichkeitspunkt ausgenommen. Es können daher $\mathfrak{P}_1(t)$ und $\mathfrak{P}_2(t)$ in beständig convergirende nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreitende Reihen entwickelt werden. Hieraus ergiebt sich für ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.) die Darstellung

$$(3.) \qquad y_1 = x^{\varrho_1} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right), \quad y_2 = x^{\varrho_2} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $\varrho_1 = -r_1$, $\varrho_2 = -r_2$ die Wurzeln der Gleichung

$$\varrho(\varrho - 1) = \gamma$$

sind, und $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ Reihen von der Form

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

sind, die für jeden Werth von x ausser für $x = 0$ convergiren. Diese Darstellung ist daher gültig für alle Werthe von x, mit Ausnahme des Punktes $x = 0$. Bei Herrn *Cayley* lauten die Integrale

$$y_1 = e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{x}} x^{1 + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}} P_1(x), \quad y_2 = e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{x}} x^{1 - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}} P_2(x),$$

worin $P_1(x)$ und $P_2(x)$ nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihen bedeuten. Die Grössen δ und ε haben nur auf den Werth der Coefficienten dieser Reihen einen Einfluss, sodass die Annahme $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ keine Aenderung an der Form obiger Ausdrücke für die Integrale hervorbringt. Dass die Gültigkeit derselben keine allgemeine sein kann, ergiebt sich schon aus der Erwägung, dass bei nur zwei singulären Punkten, wie hier $x = 0$ und $x = \infty$, ein Umlauf um den einen singulären Punkt gleichbedeutend ist mit dem entgegengesetzten Umlauf um den andern. Da nun y_1 bei der positiven Umkreisung des Unendlichkeitspunktes in $e^{2r_1\pi i}y_1$ übergeht, was wegen des regulären Charakters der Integrale in diesem Punkte mittelst Anwendung des von Herrn *Fuchs* gezeigten Verfahrens sich ergiebt, so muss dieses Integral bei der positiven Umkreisung des Nullpunktes in

$$e^{-2r_1\pi i}y_1 = e^{(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma})2\pi i}y_1$$

übergehen. Nach den Formeln des Herrn *Cayley* würde aber y_1 hierbei in $e^{2\pi i\left(1\pm\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)}y_1$ sich verändern, also die Art der Verzweigung um den Nullpunkt überhaupt nicht von γ abhängen. Herr *Cayley* ging in seiner Analyse davon aus, dass er die Function

$$z = \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = -t^2\frac{\frac{dy}{dt}}{y}, \quad \left(t = \frac{1}{x}\right)$$

einführte und für z die Reihe ansetzte

$$z = At^2+Bt+C+\frac{D}{t}+\frac{E}{t^2}+\cdots.$$

Die Differentialgleichung, der z genügt, lautet:

$$z^2-t^2\frac{dz}{dt} = \alpha t^4+\beta t^3+\gamma t^2.$$

Setzt man hierin für z eine Reihe nach absteigenden ganzen Potenzen von t, so erhellt in der That, dass der höchste Exponent gleich 2 ist, und es folgt dann für y der Ausdruck

$$y = e^{-\frac{A}{x}}x^B e^{Cx+\frac{1}{2}Dx^2+\frac{1}{3}Ex^3+\cdots}$$ *);

die Coefficienten A, B, C, D ... lassen sich vermittelst der Differential-

*) *Cayley* a. a. O. p. 293.

gleichung für z successive berechnen, und zwar ist

$$A = \pm\sqrt{\alpha}, \quad B = 1 \pm \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Der Grund, weshalb der Ansatz obiger Reihe für z zu nicht allgemeingültigen Ausdrücken für die Integrale von (1.) führt, ist in einem Umstande zu suchen, auf den neuerdings Herr *Fuchs* die Aufmerksamkeit gelenkt hat *).

Eine in der Umgebung eines Punktes $x = a$ eindeutige Function habe unzählig viele Unendlichkeitsstellen derart, dass, wie klein auch die Curve sei, die um diesen Punkt beschrieben wird, immer noch unzählig viele solche Stellen in der von der Curve umschlossenen Fläche vorhanden sind; so giebt es für diese Function überhaupt keine in der Umgebung des Punktes $x = a$ für beliebige Annäherung an denselben gültige Entwickelung nach positiven und negativen ganzen Potenzen von $x-a$. Denn eine solche gilt nach dem *Laurent*schen Satze immer nur innerhalb eines den Punkt $x = a$ umgebenden Ringes, der keine Unendlichkeitsstellen enthält, in beliebiger Nähe dieses Punktes ist aber nach der gemachten Voraussetzung ein Ring von dieser Beschaffenheit nicht vorhanden. Ein einfaches Beispiel dafür bietet sich, wie Herr *Fuchs* a. a. O. bemerkt, in der Function

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{x-a}} - b}$$

dar, welche, wenn $e^{\xi} = b$ ist, die unzählig vielen Punkte

$$x = a + \frac{1}{\xi + 2m\pi i},$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, zu Unendlichkeitsstellen hat. Von diesen befindet sich eine unendlich grosse Anzahl in jedem noch so kleinen den Punkt $x = a$ umschliessenden Bereiche.

Bilden nun $y_1, \ldots y_n$ die Elemente eines zu dem Punkte $x = 0$ gehörigen Fundamentalsystems von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, in der $x = 0$ einen singulären Punkt darstellt, so hat wenigstens eines dieser Elemente nach dem Satze

*) *Fuchs*. „Ueber die Werthe, welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können". Berliner Sitzungsberichte XIV (1886), pag. 4.

des Herrn *Fuchs* die Gestalt

$$y_1 = x^{\varrho_1}\varphi(x),$$

wo ϱ_1 eine beliebige Zahl und $\varphi(x)$ eine in der Umgebung von $x=0$ eindeutige Function bezeichnet. Es ist also

$$z = \frac{\frac{dy_1}{dx}}{y_1} = \frac{\varrho_1}{x} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

eine in der Umgebung von $x=0$ eindeutige Function von x, die ausser für $x=0$ für alle Werthe, für die $\varphi(x)$ verschwindet, unendlich wird. Wenn nun $\varphi(x)$ in der Umgebung des Punktes $x=0$ unzählig viele Nullstellen hat, so lässt z nach der vorstehenden Bemerkung überhaupt keine in diesem Bereich gültige Entwickelung nach positiven und negativen Potenzen von x zu, und jeder solcher Ansatz enthält die stillschweigende Voraussetzung, dass sich ein den Punkt $x=0$ umgebender Bereich abgrenzen lasse, in welchem die Function $\varphi(x)$ und, von $x=0$ abgesehen, auch y_1 nirgends verschwindet. Umgekehrt lässt sich aus dem Umstande, dass die angesetzte Reihe für z im Allgemeinen zu ungültigen Ausdrücken für die Integrale der Differentialgleichung (1.) geführt hat, der Schluss ziehen, dass die in dem Fundamentalsystem (3.) der Integrale von (1.) auftretenden Functionen $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$, $\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right)$ im Allgemeinen unendlich viele Nullstellen in der Umgebung von $x=0$ haben müssen.

Betrachten wir jetzt den Fall, dass etwa $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht unendlich viele Nullstellen in diesem Bereich habe, und setzen wir wieder $x=\frac{1}{t}$, so ist $\mathfrak{P}_1(t)$ eine eindeutige Function, die, da sie nur in $t=\infty$ eine singuläre Stelle hat, nach der Bezeichnung des Herrn *Weierstrass* den Charakter einer ganzen Function besitzt, und ausserdem von der Beschaffenheit ist, dass ein endlicher Theil des Gebietes von t abgegrenzt werden kann, innerhalb dessen sämmtliche Nullstellen eingeschlossen liegen. Die Anzahl solcher Nullstellen ist aber stets *endlich.* Nach einem Satze des Herrn *Weierstrass* kann daher $\mathfrak{P}_1(t)$ in der Form

$$G_0(t)\,e^{G(t)}$$

dargestellt werden, wo $G_0(t)$ eine ganze rationale Function bedeutet, deren Grad k gleich der Anzahl der Nullstellen ist, und $G(t)$ den Charakter einer ganzen Function hat, also durch eine nach ganzen positiven Potenzen fort-

schreitende, für jeden endlichen Werth von t convergirende Reihe, die auch endlich sein kann, darstellbar ist *). In dem betrachteten Falle kann man also dem Integrale y_1 die Form geben

$$y_1 = t^{r_1} G_0(t) e^{G(t)} = x^{\varrho_1 - k} f(x) e^{G\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad (\varrho_1 = -r_1),$$

wenn

$$G_0(t) = G_0\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^k}$$

gesetzt wird, wo $f(x)$ eine ganze rationale Function des $k$ten Grades von x bedeutet.

Soll nun ein Integral des Fundamentalsystems die Form eines Normalintegrals annehmen können, d. h. der Gleichung (1.) durch eine Function von der Gestalt

$$(4.) \qquad y = e^{\frac{A_m}{x^m} + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x}} x^A (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots)$$

genügt werden, worin B_0 von Null verschieden ist, so muss

$$\frac{A_m}{x^m} + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x} = G\left(\frac{1}{x}\right),$$

also G eine *rationale* ganze Function von $\frac{1}{x}$ sein, ferner

$$A = \varrho - k,$$

worin $k = 0$ oder eine positive ganze Zahl ist, und

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots = f(x),$$

also die Reihe auf der linken Seite sich auf eine ganze Function vom $k$ten Grade reduciren, demnach B_{k+1} und alle folgenden Coefficienten verschwinden. Da B_0 von Null verschieden ist, so folgt, dass $f(x)$ für $x = 0$ nicht verschwindet.

Was zunächst den Grad m der Function G in Bezug auf $\frac{1}{x}$ betrifft, so bemerken wir, dass nach (4.) sich ergiebt

$$\frac{y''}{y} = \frac{m(m+1)A_m}{x^{m+2}} + \frac{m(m-1)A_{m-1}}{x^{m+1}} + \cdots + \frac{2A_1}{x^3} - \frac{A}{x^2} + P'(x) + \left(-\frac{mA_m}{x^{m+1}} - \frac{(m-1)A_{m-1}}{x^m} - \cdots - \frac{A_1}{x^2} + \frac{A}{x} + P(x)\right)^2,$$

*) *Weierstrass*. „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.“ Abhandlungen der Berliner Akademie 1876, p. 32.

worin

$$P(x) = \frac{B_1+2B_2x+3B_3x^2+\cdots}{B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots}$$

ist, also, da B_0 von Null verschieden ist, in eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Hieraus folgt, dass das niedrigste Glied von $y'':y$ in der Entwickelung nach steigenden Potenzen von x

$$\frac{m^2A_m^2}{x^{2(m+1)}}$$

ist, und da andererseits nach Gleichung (1.)

$$\frac{y''}{y} = \frac{\alpha}{x^4}+\frac{\beta}{x^3}+\frac{\gamma}{x^2}$$

ist, so ergiebt die Vergleichung, dass für $m>1$ $A_m=0$ und $A_1^2=\alpha$ ist. Demnach ist G vom ersten Grade in Bezug auf $\frac{1}{x}$, und zwar ist

$$G\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\frac{\sqrt{\alpha}}{x},$$

also

$$y = e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{x}}x^A(B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots).$$

Setzen wir jetzt

$$y = e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{x}}\eta,$$

so wird

$$y'' = e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{x}}\left(\eta''-2\frac{\sqrt{\alpha}}{x^2}\eta'+\left(\frac{\alpha}{x^4}+\frac{2\sqrt{\alpha}}{x^3}\right)\eta\right),$$

und die Gleichung (1.) geht über in

$$\eta''-\frac{2\sqrt{\alpha}}{x^2}\eta'+\left(\frac{\alpha}{x^4}+\frac{2\sqrt{\alpha}}{x^3}\right)\eta = \left(\frac{\alpha}{x^4}+\frac{\beta}{x^3}+\frac{\gamma}{x^2}\right)\eta$$

oder, indem man mit x^3 multiplicirt,

$$(5.)\qquad x^3\eta''-2\sqrt{\alpha}x\eta'+(2\sqrt{\alpha}-\beta-\gamma x)\eta = 0.$$

Setzt man hierin weiter, um die Coefficienten A, B_0, B_1, B_2, ... zu bestimmen,

$$\eta = x^A(B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots),$$

sodass

$$\frac{\eta}{x^A} = B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots \qquad = u_0,$$

$$\frac{\eta'}{x^{A-1}} = AB_0+(A+1)B_1x+(A+2)B_2x^2+\cdots \qquad = u_1,$$

$$\frac{\eta''}{x^{A-2}} = A(A-1)B_0+(A+1)AB_1x+(A+2)(A+1)B_2x^2+\cdots = u_2,$$

so erhält man aus (5.) nach Division durch x^A die Identität

$$(6.) \qquad xu_2-2\sqrt{\alpha}u_1+(2\sqrt{\alpha}-\beta-\gamma x)u = 0.$$

Für $x=0$ ergiebt sich hieraus

$$-2\sqrt{\alpha}.AB_0+(2\sqrt{\alpha}-\beta)B_0 = 0,$$

und da B_0 von Null verschieden ist:

$$-2\sqrt{\alpha}.A+2\sqrt{\alpha}-\beta = 0,$$

also

$$(7.) \qquad A = 1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Der Coefficient von x^{k+1} in (6.), gleich Null gesetzt, giebt

$$((A+k)(A+k-1)-\gamma)B_k = (2\sqrt{\alpha}(A+k+1)+2\sqrt{\alpha}-\beta)B_{k+1}$$

oder in Folge der Relation (7.)

$$(8.) \qquad ((A+k)(A+k-1)-\gamma)B_k = (k+1)2\sqrt{\alpha}.B_{k+1}.$$

Oben hatten wir aus Betrachtungen, die von der Form (3.) der Integrale von (1.) ihren Ausgang nahmen, den Schluss gezogen, dass, wenn ein Normalintegral von der Form (4.) existiren soll, die Reihe

$$B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots$$

aus einer *endlichen* Anzahl von Gliedern bestehen müsse. Aus der Relation (8.) zwischen den Coefficienten dieser Reihe können wir eine Bestätigung dieses Satzes entnehmen, indem wir nachweisen, dass eine unendliche Reihe, deren Coefficienten der Relation (8.) genügen, für jeden Werth von x divergiren muss. In der That ist

$$\lim_{k=\infty}\frac{B_{k+1}}{B_k} = \lim_{k=\infty}\frac{(A+k)(A+k-1)-\gamma}{(k+1)2\sqrt{\alpha}} = \infty,$$

also wächst der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder der Reihe

$$\frac{B_{k+1}x}{B_k}$$

für jeden von Null verschiedenen Werth von x mit k ins Unendliche, wodurch die Divergenz der Reihe für jeden Werth von x erwiesen ist.

Soll aber die Reihe eine endliche sein, so muss es eine positive ganze Zahl k geben, für welche

$$(9.) \quad (A+k)(A+k-1)-\gamma = 0$$

ist. Die Relation (8.) und die aus ihr hervorgehenden, wenn man für k der Reihe nach $k+1$, $k+2$, ... setzt, zeigen, dass, wenn k die kleinste in der natürlichen Reihe der Zahlen ist, für welche die Gleichung (9.) erfüllt wird, von B_{k+1} an alle folgenden Coefficienten verschwinden. k ist also dann der Grad des Polynoms, in das die Reihe übergeht, und das wir oben mit $f(x)$ bezeichneten. Da ϱ eine Wurzel der Gleichung

$$\varrho(\varrho-1) = \gamma$$

ist, so erhalten wir in (9.) von Neuem die andere bereits früher abgeleitete Bedingung für die Existenz des Normalintegrals

$$A = \varrho-k,$$

nur dass uns jetzt der Werth für A bekannt ist, er ist nach (7.) $1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}$, woraus beiläufig erhellt, dass für $\alpha = 0$ kein Normalintegral der Gleichung (1.) existirt. Zugleich lässt sich erkennen, dass die Bedingung (9.), die, wenn man für A seinen Werth einsetzt, lautet:

$$\left(k-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(k+1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right) = \gamma$$

(k eine positive ganze Zahl oder Null), zur Existenz des Normalintegrals nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend ist. Denn setzt man in der Recursionsformel (8.) für k der Reihe nach 0, 1, 2, ... $k-1$, so erhält man $B_1, B_2, \ldots B_k$ successive durch B_0 ausgedrückt und zwar, da für diese Werthe von k die Grösse $(A+k)(A+k-1)-\gamma$ von Null verschieden ist, in endlichen Werthen, während, wie bereits bemerkt, alle folgenden Coefficienten B_{k+1}, B_{k+2} etc. verschwinden. Für die Berechnung der Coefficienten $B_1, \ldots B_k$ bemerke man, dass mit Benutzung der Gleichungen (9.) und (7.)

$$\begin{aligned}(A+m)(A+m-1)-\gamma &= -(k-m)(2A+k+m-1)\\ &= -(k-m)\left(k+m+1-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)\end{aligned}$$

ist. Wir erhalten also

$$(m+1)2\sqrt{\alpha}.B_{m+1} = -(k-m)\left(k+m+1-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)B_m$$

und damit die recurrenten Formeln

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\alpha}.B_1 &= -k\Big(k+1-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)B_0, \\ 2\sqrt{\alpha}.B_2 &= -(k-1)\Big(k+2-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)B_1, \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ 2\sqrt{\alpha}.B_m &= -(k-(m-1))\Big(k+m-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)B_{m-1}, \end{aligned}$$

woraus sich ergiebt

$$B_m = \frac{k(k-1)\ldots(k-(m-1))}{1.2.3\ldots m}\,\frac{\Big(k+1-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)\Big(k+2-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)\ldots\Big(k+m-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)}{(-2\sqrt{\alpha})^m}\cdot B_0.$$

Wir sind hiermit zu folgendem Resultat gelangt:

Damit die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Big(\frac{\alpha}{x^4}+\frac{\beta}{x^3}+\frac{\gamma}{x^2}\Big)y$$

ein Normalintegral von der Form (4.) habe, ist nothwendig und hinreichend, dass die quadratische Gleichung

$$(10.)\qquad \Big(x-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\Big)\Big(x+1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\Big) = \gamma$$

für einen der beiden Werthe von $\sqrt{\alpha}$ eine positive ganze Zahl oder Null zur Wurzel habe. Ist diese Bedingung für einen der beiden Werthe von $\sqrt{\alpha}$ erfüllt und ist k diese Zahl — für den Fall, dass zwei solcher Zahlen existiren sollten, die kleinere —, so lässt die Gleichung (1.) ein particuläres Integral in geschlossener Form zu, nämlich

$$(11.)\qquad y_1 = e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{x}}\,x^{1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}}f(x),$$

wo $f(x)$ eine ganze Function $k$ten Grades bedeutet, die, abgesehen von einem constanten Factor, folgende Gestalt hat

$$f(x) = 1+\frac{k\Big(k+1-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)}{-2\sqrt{\alpha}}x+\frac{k(k-1)}{1.2}\,\frac{\Big(k+1-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)\Big(k+2-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)}{(-2\sqrt{\alpha})^2}x^2+\cdots$$
$$+\frac{\Big(k+1-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)\Big(k+2-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)\ldots\Big(2k-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\Big)}{(-2\sqrt{\alpha})^k}x^k.$$

Für $\sqrt{\alpha}$ ist derselbe Werth wie in (10.) zu nehmen. Hiernach lässt sich leicht die Bedingung dafür herstellen, dass das *allgemeine* Integral von (1.) in geschlossener Form sich darstellen lasse; denn dazu ist nur nothwendig, dass für beide Werthe von $\sqrt{\alpha}$ obige Bedingung erfüllt sei. Sei k die zu $+\sqrt{\alpha}$, l die zu $-\sqrt{\alpha}$ gehörige kleinste positive ganze Zahl, so muss

$$\left(k-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(k+1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)=\left(l+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)\left(l+1+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)=\gamma$$

sein. Dies ergiebt

$$\left(k-l-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)(1+k+l)\;=\;0,$$

und da k und l nicht negativ sein dürfen, so erhält man als die gesuchten Bedingungen

$$(12.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}} = k-l, \\ \gamma = \dfrac{k+l}{2}\left(\dfrac{k+l}{2}+1\right), \end{cases}$$

worin k und l beliebige positive ganzzahlige Werthe, die Null eingeschlossen, annehmen können. Sind die Gleichungen (12.) erfüllt, und versteht man wieder für den Fall, dass die beiden Lösungssysteme von (12.) in positiven ganzen Zahlen ausfallen sollten, unter k und l die kleinsten unter den Lösungen resp. für k und l, so erhält man ein zweites von dem Integral (11.) linear unabhängiges Integral

$$(13.)\qquad y_2 = e^{-\frac{\sqrt{\alpha}}{x}} x^{1+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}} g(x),$$

wo, abgesehen von einem willkürlichen constanten Factor:

$$(14.)\qquad \begin{cases} g(x) = 1+\dfrac{l\left(l+1+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)}{2\sqrt{\alpha}}x+\dfrac{l(l-1)}{1.2}\cdot\dfrac{\left(l+1+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(l+2+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)}{(2\sqrt{\alpha})^2}x^2+\cdots \\ \qquad\cdots+\dfrac{\left(l+1+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(l+2+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)\cdots\left(2l+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)}{(2\sqrt{\alpha})^l}x^l. \end{cases}$$

Hieran möge noch eine Folgerung geknüpft sein. Bekanntlich lässt sich das allgemeine Integral der Gleichung (1.) mittelst des particulären y_1 in der Form ausdrücken

$$y = y_1\int\frac{dx}{y_1^2} = e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{x}} x^{1-\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}} f(x)\int\frac{e^{-\frac{2\sqrt{\alpha}}{x}} x^{-2+\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}}{(f(x))^2}dx.$$

Da nun

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

so ergiebt sich hieraus nach (12.) und (13.)

$$(14.) \quad \int \frac{e^{-\frac{2\sqrt{\alpha}}{x}} x^{-2+k-l}}{(f(x))^2}\, dx = c_1 + c_2 e^{-\frac{2\sqrt{\alpha}}{x}} x^{k-l} \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Setzt man hierin $x = \frac{1}{t}$ und $-2\sqrt{\alpha} = \lambda$, so erhält man die Integralformel

$$(15.) \quad \int \frac{e^{\lambda t} t^{k+l}}{(F(t))^2}\, dt = c_1 + c_2 e^{\lambda t} \frac{G(t)}{F(t)},$$

wo

$$(16.) \quad F(t) = t^k + \frac{k(l+1)}{\lambda} t^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1.2} \frac{(l+1)(l+2)}{\lambda^2} t^{k-2} + \cdots + \frac{(l+1)(l+2)\ldots(l+k)}{\lambda^k},$$

$$(17.) \quad G(t) = t^l + \frac{l(k+1)}{-\lambda} t^{l-1} + \frac{l(l-1)}{1.2} \frac{(k+1)(k+2)}{(-\lambda)^2} t^{l-2} + \cdots + \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+l)}{(-\lambda)^l}.$$

Die Formel (14.) gilt für jeden Werth von λ mit Ausnahme von $\lambda = 0$; c_1 ist eine willkürliche Constante, c_2 bestimmt sich durch Differentiation von (14.) und Gleichsetzung der Coefficienten von $t^{k+\lambda}$ auf beiden Seiten. Man erhält

$$c_2 = \frac{1}{\lambda}.$$

Ehe wir diesen Abschnitt schliessen, sei noch der Fall berührt, wo $\alpha = 0$ ist, die zu betrachtende Differentialgleichung also die Form hat

$$(18.) \quad y'' = \left(\frac{\beta}{x^3} + \frac{\gamma}{x^2}\right) y;$$

dieselbe ist, wie schon erwähnt, durch ein Normalintegral nicht zu befriedigen. Dagegen können, wie Herr *Cayley* bemerkt hat, Integrale von der Form (4.) mit gebrochenen Potenzen von x derselben genügen. Dieselben würden dann lineare Verbindungen der zu $x = 0$ gehörigen beiden Elemente des Fundamentalsystems sein müssen. Um die Bedingungen dieses Falls zu erörtern, bemerken wir zunächst, dass, wenn x^m die höchste Potenz von x ist, die in dem Exponenten von e für y als Nenner auftritt, auch hier das niedrigste Glied von $y'' : y$ in der Entwickelung nach steigenden (gebrochenen) Potenzen von x

$$\frac{m^2 A_m^2}{x^{2(m+1)}}$$

ist, woraus folgt, dass $2(m+1) = 3$, also $m = \frac{1}{2}$. Wir setzen demnach

zunächst

$$x^{\frac{1}{2}} = \xi,$$

wodurch die betrachtete Differentialgleichung übergeht in

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{dy}{d\xi} = \left(\frac{4\beta}{\xi^4} + \frac{4\gamma}{\xi^2}\right)y,$$

und indem wir ferner

$$y = \xi^{\frac{1}{2}}\eta$$

setzen, erhalten wir die Gleichung

$$(19.) \qquad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \left(\frac{4\beta}{\xi^4} + \frac{4\gamma+\frac{3}{4}}{\xi^2}\right)\eta,$$

welche dieselbe Form wie (1.) hat. Wir können also darauf unmittelbar die für (1.) erhaltenen Resultate anwenden, indem wir statt

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

hier

$$4\beta, \quad 0, \quad 4\gamma+\tfrac{3}{4}$$

substituiren. Hiernach ergiebt sich

$$A_1 = \pm\sqrt{4\beta}, \quad A = 1.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Gleichung (19.) durch ein Normalintegral genügt werde, ist also

$$k(k+1) = 4\gamma+\tfrac{3}{4}, \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{(2k-1)(2k+3)}{16},$$

wo k eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet. Da diese Bedingung $\sqrt{4\beta}$ nicht enthält, so giebt es jedesmal, wo sie erfüllt ist, den beiden Vorzeichen von $\sqrt{4\beta}$ entsprechend, zwei linear unabhängige Normalintegrale von der Form

$$\eta = e^{\pm\frac{\sqrt{4\beta}}{\xi}}.\xi f(\xi),$$

wo $f(\xi)$ eine ganze Function $k$ten Grades bedeutet, die, abgesehen von einem constanten Factor, die Gestalt hat

$$f(\xi) = 1 + \frac{k(k+1)}{\mp 2\sqrt{4\beta}}\xi + \frac{k(k-1)}{1.2}\frac{(k+1)(k+2)}{(\mp 2\sqrt{4\beta})^2}\xi^2$$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}.\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{(\mp 2\sqrt{4\beta})^3}\xi^3 + \cdots + \frac{(k+1)(k+2)\ldots 2k}{(\mp 2\sqrt{4\beta})^k}\xi^k.$$

Die Gleichung (18.) hat somit, falls γ der obigen Bedingung genügt, die beiden

Integrale

$$y = e^{\pm\frac{\sqrt{4\beta}}{x^{\frac{1}{2}}}} x^{\frac{3}{4}} f(x^{\frac{1}{2}}),$$

worin f vorstehende Function bedeutet, nachdem $x^{\frac{1}{2}}$ für ξ substituirt ist *).

Die determinirende Gleichung

$$\varrho(\varrho-1) = \gamma$$

hat, wenn γ die in der obigen Formel enthaltenen Werthe annimmt, die Wurzeln

$$\varrho_1 = \frac{k}{2}+\frac{3}{4}, \quad \varrho_2 = -\frac{k}{2}+\frac{1}{4}.$$

Entwickelt man daher y nach Potenzen von x, so muss die Reihe sich in zwei Theile sondern lassen:

$$\sum_\lambda a_\lambda x^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}-\lambda} \quad \text{und} \quad \sum_\lambda b_\lambda x^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{4}-\lambda} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots \infty).$$

Daraus folgt, dass die Coefficienten von

$$x^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}-\frac{\delta}{2}}$$

für

$$\delta = 1, \quad 3, \quad 5, \quad \ldots \quad 2k-1$$

im obigen Ausdruck für y verschwinden müssen, was die Rechnung bestätigt.

2.

Die Gesammtheit der Formen linearer Differentialgleichungen, in welchen $x = 0$ der einzige singuläre Punkt im Endlichen ist und in der Umgebung von $x = \infty$ sämmtliche Integrale regulär sind, werden wir erhalten, wenn wir die Gleichung

$$(20.)\quad \begin{cases} t^n \frac{d^n y}{dt^n} + t^{n-1}(A_1 + B_1 t + C_1 t^2 + \cdots)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots \\ \cdots + t(A_{n-1} + B_{n-1} t + C_{n-1} t^2 + \cdots)\frac{dy}{dt} + (A_n + B_n t + C_n t^2 + \cdots) y = 0, \end{cases}$$

worin

$$A_\varkappa + B_\varkappa t + C_\varkappa t^2 + \cdots$$

endliche oder für jedes endliche t convergirende unendliche Reihen be-

*) Vgl. *Cayley* a. a. O. p. 295.

zeichnen, durch $t=\frac{1}{x}$ transformiren. Denn die Gleichung (20.) hat die Gestalt, wie sie nach dem Satze des Herrn *Fuchs* nothwendig ist, damit in der Umgebung von $t=0$ lauter reguläre Integrale existiren. Ausserdem besitzt sie keinen singulären Punkt im Endlichen. Schreiben wir die Gleichung (20.) der Kürze wegen

$$(20^{a}.)\quad t^{n}\frac{d^{n}y}{dt^{n}}+t^{n-1}P_{1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+tP_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+P_{n}(t)y=0,$$

so geht dieselbe durch die Substitution $t=\frac{1}{x}$, wenn wir vorläufig in den Reihen noch t beibehalten, in die Form

$$(21.)\quad x^{n}\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+x^{n-1}\mathfrak{P}_{1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+x\mathfrak{P}_{(n-1)}(t)\frac{dy}{dx}+\mathfrak{P}_{n}(t)y=0$$

über. Die Beziehungen zwischen den Reihen $\mathfrak{P}$ und P, die von y unabhängig sind, ersieht man am besten, wenn man in (20.) t^{ν}, in (21.) die ihr gleiche Grösse $x^{-\nu}$ für y substituirt. (ν eine ganz beliebige Zahl.) Die linke Seite von (20.) muss dann gleich derjenigen von (21.), multiplicirt mit einer Constanten sein. Dieselbe ergiebt sich $=(-1)^{n}$, und man erhält

$$(22.)\begin{cases}\nu(\nu-1)\ldots(\nu-(n-1))+\nu(\nu-1)\ldots(\nu-(n-2))P_{1}(t)+\cdots+\nu P_{n-1}(t)+P_{n}(t)\\ =\nu(\nu+1)\ldots(\nu+n-1)-\nu(\nu+1)\ldots(\nu+n-2)\mathfrak{P}_{1}(t)+\cdots\\ \qquad\qquad\cdots+(-1)^{n-1}\nu\mathfrak{P}_{n-1}(t)+(-1)^{n}\mathfrak{P}_{n}(t).\end{cases}$$

Durch Vergleichung der Glieder mit gleich hohen Potenzen von ν erhält man $\mathfrak{P}_{k}(t)$ als lineare Function von $P_{1}(t)$, $P_{2}(t)$, $\ldots$ $P_{k}(t)$. Die Reihen $\mathfrak{P}_{1}(t)$, $\ldots$ $\mathfrak{P}_{n}(t)$ convergiren also ebenso wie die Reihen $P_{1}(t)$, $\ldots P_{n}(t)$ für jeden endlichen Werth von t.

Als allgemeine Form einer Differentialgleichung mit x als unabhängiger Veränderlichen von der Beschaffenheit, dass sie ausser $x=0$ keinen singulären Punkt im Endlichen hat, und in der Umgebung von $x=\infty$ lauter reguläre Integrale besitzt, ergiebt sich demnach die folgende:

$$x^{n}\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+x^{n-1}\mathfrak{P}_{1}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+x\mathfrak{P}_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx}+\mathfrak{P}_{n}\left(\frac{1}{x}\right)y=0$$

oder explicite

$$x^{n}\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+x^{n-1}\left(a_{1}+\frac{b_{1}}{x}+\frac{c_{1}}{x^{2}}+\cdots\right)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots$$
$$\cdots+x\left(a_{n-1}+\frac{b_{n-1}}{x}+\frac{c_{n-1}}{x^{2}}+\cdots\right)\frac{dy}{dx}+\left(a_{n}+\frac{b_{n}}{x}+\frac{c_{n}}{x^{2}}+\cdots\right)y=0,$$

wo die Reihen eindeutige Functionen darstellen mit der einzigen (wesentlichen oder ausserwesentlichen) singulären Stelle $x = 0$.

Das Fundamentalsystem von Integralen dieser Gleichung in der Umgebung von $x = \infty$, die in unserem Falle über die ganze x-Ebene sich erstreckt, also zugleich die Umgebung von $x = 0$ bildet, findet man aus dem zu $t = 0$ gehörigen Fundamentalsystem der Integrale von (20.), dessen Elemente nach dem Satze des Herrn ***Fuchs*** im Allgemeinen die Form haben

$$t^{r_1}\varphi_1(t), \quad t^{r_2}\varphi_2(t), \quad \ldots \quad t^{r_n}\varphi_n(t).$$

$\varphi_1(t), \ldots \varphi_n(t)$ sind eindeutige Functionen, die, da die Gleichung (20.) keinen singulären Punkt ausser $t = 0$ im Endlichen hat, durch beständig convergirende Reihen nach ganzen positiven Potenzen von t darstellbar sind, und für $t = 0$ nicht verschwinden.

$r_1, r_2, \ldots r_n$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$r(r-1)\ldots(r-(n-1))+r(r-1)\ldots(r-(n-2))P_1(0)+\cdots+rP_{n-1}(0)+P_n(0) = 0.$$

Sind einige dieser Wurzeln von einander bloss um ganze Zahlen verschieden, so können auch in dem Fundamentalsystem Glieder von der Form

$$t^{r_k}(\varphi_{k,0}(t)+\varphi_{k,1}(t)\log t+\cdots+\varphi_{k,\mu}(\log t)^{\mu})$$

auftreten, wo $\varphi_{k,0}, \ldots \varphi_{k,\mu}$ wiederum beständig convergirende Reihen sind.

Nach der Relation (22.) sind $r_1, r_2, \ldots r_n$ auch Wurzeln der Gleichung

$$r(r+1)\ldots(r+n-1)-r(r+1)\ldots(r+n-2)\mathfrak{P}_1(0)+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}r\mathfrak{P}_{n-1}(0)+(-1)^n\mathfrak{P}_n(0) = 0.$$

Daraus folgt, dass

$$-r_1, \quad -r_2, \quad \ldots \quad -r_n$$

die Wurzeln der Gleichung sind:

$$r(r-1)\ldots(r-(n-1))+r(r-1)\ldots(r-(n-2))\mathfrak{P}_1(0)+\cdots+r\mathfrak{P}_{n-1}(0)+\mathfrak{P}_n(0) = 0.$$

Bemerken wir noch, dass $\mathfrak{P}_k(0) = a_k$, so gelangen wir zu dem Satze:

Die Gleichung

$$(23.)\quad \begin{cases} x^n\dfrac{d^ny}{dx^n}+x^{n-1}\left(a_1+\dfrac{b_1}{x}+\dfrac{c_1}{x^2}+\cdots\right)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots \\ \qquad \cdots+x\left(a_{n-1}+\dfrac{b_{n-1}}{x}+\dfrac{c_{n-1}}{x^2}+\cdots\right)\dfrac{dy}{dx}+\left(a_n+\dfrac{b_n}{x}+\dfrac{c_n}{x^2}+\cdots\right)y = 0, \end{cases}$$

worin die Reihen in den Coefficienten entweder endlich sind, oder für jeden von Null verschiedenen Werth von x convergiren, hat ein Fundamental-

system von Integralen, dessen Elemente sich darstellen lassen in der Form

$$x^{\varrho_1}\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right), \quad x^{\varrho_2}\varphi_2\left(\frac{1}{x}\right), \quad \ldots \quad x^{\varrho_n}\varphi_n\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo die Functionen $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ Reihen bezeichnen, die nach ganzen positiven Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreiten, für jeden von Null verschiedenen Werth convergiren und für $x = \infty$ nicht verschwinden. $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$(24.) \quad \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-(n-1))+\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-(n-2))a_1+\cdots+\varrho a_{n-1}+a_n = 0.$$

In der Voraussetzung, an der wir im Folgenden der Einfachheit wegen festhalten werden, dass nicht zwei der Wurzeln sich bloss um ganze Zahlen von einander unterscheiden, sind sämmtliche $\varphi_\varkappa$ für $x = \infty$ von Null verschieden.

Dieses Resultat findet sich bereits in meiner Abhandlung: „Ueber ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen etc." dieses Journal, Bd. 83, p. 200 ff. angegeben. Dort ward es auf einem anderen Wege abgeleitet, nämlich als Folge einer allgemeinen Methode, die daselbst für die Darstellung der (regulären oder irregulären) Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung ihrer singulären Punkte entwickelt wird. Entgegen der neuerdings wiederholt geäusserten Bemerkung, dass eine Darstellung der irregulären Integrale bisher noch nicht existire, sei bei dieser Gelegenheit auf die erwähnte Abhandlung und die sie ergänzende „Ueber die Wurzeln der Fundamentalgleichung etc." dieses Journal, Bd. 84 hingewiesen *). Es werden in diesen Abhandlungen sowohl die Coefficienten der Fundamentalgleichung, die zu einem singulären Punkt gehört, als auch die Reihen für die Integrale in fertigen Formeln angegeben.

Untersuchen wir nun die Bedingungen dafür, dass der Gleichung (23.) durch ein Normalintegral genügt werde von der Form

$$(25.) \quad y = x^A e^{\frac{A_m}{x^m}+\frac{A_{m-1}}{x^{m-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x}}(B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots),$$

wo der Ausdruck in Klammern eine nach ganzen positiven Potenzen von x

---

*) In der zuletzt citirten Abhandlung befindet sich ein Druckfehler. S. 264 in der ersten (nicht numerirten) Gleichung muss es heissen $\frac{d^x y}{(d\log x)^x}$ statt $\frac{d^x \log y}{(d\log x)^x}$.

fortschreitende, für hinlänglich kleine Werthe von x convergente Reihe bedeutet, in der B_0 von Null verschieden ist.

Da die Function y in (25.) bei einem Umlauf um $x = 0$ in sich selbst multiplicirt mit der Constanten $e^{2A\pi i}$ übergeht, so muss sie nach der obigen Voraussetzung über die Wurzeln der Gleichung (24.), abgesehen von einem constanten Factor, mit einem der Elemente des obigen Fundamentalsystems, welches wir der Kürze wegen

$$x^\varrho \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

schreiben, übereinstimmen.

Die logarithmische Differentiation der Gleichung (25.) ergiebt, wenn man den Ausdruck

$$\frac{B_1+2B_2x+3B_3x^2+\cdots}{B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots}$$

mit Rücksicht darauf, dass B_0 von Null verschieden ist, in die für hinlänglich kleine Werthe von x convergente Reihe:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

entwickelt,

$$(26.)\quad \frac{y'}{y} = -\frac{mA_m}{x^{m+1}} - \frac{(m-1)A_{m-1}}{x^m} - \cdots - \frac{A_1}{x^2} + \frac{A}{x} + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots.$$

Damit aber eine solche Entwickelung möglich sei, ist in Rücksicht darauf, dass $y = x^\varrho \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, nothwendig, dass die eindeutige Function $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ in der Umgebung von $x = 0$ oder $\varphi(t)$ in der Umgebung von $t = \infty$ nicht unendlich viele Nullstellen habe. Da aber $\varphi(t)$ den Charakter einer ganzen Function hat, die für $t = 0$ nicht verschwindet, so erfordert dies, dass im ganzen t-Gebiet nur eine endliche Anzahl von Nullstellen der Function $\varphi(t)$ vorhanden sind, zu denen aber $t = 0$ nicht gehört. Dann aber lässt sich nach dem citirten Satze des Herrn *Weierstrass* $\varphi(t)$ auf die Form

$$\varphi(t) = G_0(t)e^{G(t)}$$

bringen, wo $G_0(t)$ eine ganze rationale Function von t bedeutet, die für $t = 0$ nicht verschwindet, und deren Grad k gleich der Anzahl der Nullstellen ist, während $G(t)$ eine rationale oder transcendente ganze Function bedeutet. Wir erhalten also

$$y = x^\varrho G_0\left(\frac{1}{x}\right)e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

In $G\left(\frac{1}{x}\right)$ können wir das von x freie Glied c_0 weglassen, indem wir $G_0\left(\frac{1}{x}\right)$ mit dem constanten Factor e^{c_0} multiplicirt denken.

Die Forderung nun, dass y die Form des Normalintegrals (25.) habe, bedingt, dass $G\left(\frac{1}{x}\right)$ eine *rationale* ganze Function von $\frac{1}{x}$ sei:

$$G\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{A_m}{x^m} + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x}.$$

Ferner muss

$$x^A(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots) = x^\varrho G_0\left(\frac{1}{x}\right) = x^{\varrho-k} x^k G_0\left(\frac{1}{x}\right)$$

sein. Da $x^k G_0\left(\frac{1}{x}\right)$ nach dem Obigen eine ganze Function $k$ten Grades von x ist, so folgt, dass die Reihe in Klammern eine endliche ist, und zwar ergiebt sich

$$B_0 + B_1 x + \cdots + B_k x^k = x^k G_0\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$A = \varrho - k.$$

Da B_0 von Null verschieden ist, so erhellt weiter, dass die ganze Function $x^k G_0\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x = 0$ nicht verschwinden darf.

In dem Normalintegrale von der Form (25.), falls ein solches der Gleichung (23.) genügt, muss also der Exponent von x den Werth $\varrho - k$ haben, wo ϱ eine Wurzel der Gleichung (24.) und k eine positive ganze Zahl ist. Die nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe, die daselbst auftritt, muss sich ferner auf eine ganze rationale Function $k$ten Grades reduciren, die für $x = 0$ nicht verschwindet. Was den Grad m von $G\left(\frac{1}{x}\right)$ betrifft, so lässt sich für denselben eine obere Grenze angeben. Hierzu bedürfen wir des folgenden Hülfssatzes.

Ist y eine Function von x von der Beschaffenheit, dass die logarithmische Ableitung in der Form

$$\frac{y'}{y} = x^{-\mu}\mathfrak{P}_1(x)$$

darstellbar ist, worin μ eine positive ganze Zahl und $\mathfrak{P}_1(x)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende, für hinlänglich kleine Werthe von x convergente Reihe bezeichnet, die für $x = 0$ nicht verschwindet, so lässt sich $y^{(n)} : y$ in der Form:

$$\frac{y^{(n)}}{y} = x^{-\mu n}\{(\mathfrak{P}_1(x))^n + x^{\mu-1} Q_n(x)\},$$

wo $Q_n(x)$ eine nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihe bezeichnet. Ist nun $\mu > 1$, so ist

$$\left| x^{\mu n} \frac{y^{(n)}}{y} \right|_{x=0} = (\mathfrak{P}_1(0))^n.$$

Für $n = 2$ ergiebt sich der Satz unmittelbar, denn es ist

$$y'' = y' x^{-\mu} \mathfrak{P}_1(x) + y \frac{d(x^{-\mu}\mathfrak{P}_1(x))}{dx} = y \{ x^{-2\mu} (\mathfrak{P}_1(x))^2 + x^{-\mu-1} Q_2(x) \},$$

wo $Q_2(x)$ eine Potenzreihe mit ganzen positiven Potenzen von x bedeutet, also

$$\frac{y''}{y} = x^{-2\mu} \{ (\mathfrak{P}_1(x))^2 + x^{\mu-1} Q_2(x) \}.$$

Es sei nun der Satz für $n = m$ bewiesen, also

$$\frac{y^{(m)}}{y} = x^{-\mu m} \{ (\mathfrak{P}_1(x))^m + x^{\mu-1} Q_m(x) \},$$

so folgt durch Differentiation

$$y^{(m+1)} = y' x^{-\mu m} \{ (\mathfrak{P}_1(x))^m + x^{\mu-1} Q_m(x) \} + y x^{-\mu m-1} R(x),$$

wo $R(x)$ wieder eine Potenzreihe mit ganzen positiven Potenzen von x bedeutet, mithin

$$\begin{aligned} \frac{y^{(m+1)}}{y} &= x^{-\mu(m+1)} \{ (\mathfrak{P}_1(x))^{m+1} + x^{\mu-1} Q_m(x) \mathfrak{P}_1(x) \} + x^{-\mu m-1} R(x) \\ &= x^{-\mu(m+1)} \{ (\mathfrak{P}_1(x))^{m+1} + x^{\mu-1} Q_{m+1}(x) \}, \end{aligned}$$

indem wir

$$Q_m(x) \mathfrak{P}_1(x) + R(x) = Q_{m+1}(x)$$

setzen. Folglich gilt auch der Satz für $n = m+1$.

Wir dividiren die Gleichung (23.) durch x^n und schreiben sie jetzt, wie folgt:

$$(27.) \quad \begin{cases} y^{(n)} + \left(\frac{(11)}{x} + \frac{(12)}{x^2} + \cdots + \frac{(1k_1)}{x^{k_1}} \right) y^{(n-1)} \\ + \left(\frac{(22)}{x^2} + \frac{(23)}{x^3} + \cdots + \frac{(2k_2)}{x^{k_2}} \right) y^{(n-2)} + \cdots \\ \cdots + \left(\frac{(nn)}{x^n} + \frac{(n, n+1)}{x^{n+1}} + \cdots + \frac{(n, k_n)}{x^{k_n}} \right) y = 0. \end{cases}$$

In dem Coefficienten (kl) deutet die erste Ziffer k an, dass er mit $y^{(n-k)}$

multiplicirt ist, und die zweite Ziffer l, dass der bezügliche Nenner x^l ist. Die specielle Klasse der Differentialgleichungen, die wir betrachten, ist dadurch vollständig charakterisirt, dass überall $l \geqq k$ ist.

Gesetzt nun, der Gleichung (27.) würde durch ein Integral von der Form (25.) genügt, so dass

$$(27^a.) \qquad G\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{A_m}{x^m} + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x},$$

dann folgt aus dem Ausdruck (26.) für $y' : y$

$$\frac{y'}{y} = x^{-(m+1)}\mathfrak{P}_1(x)$$

und nach dem eben bewiesenen Hülfssatze, wenn man $m+1$ für μ und k für n setzt,

$$(28.) \qquad \frac{y^{(k)}}{y} = x^{-k(m+1)}\mathfrak{P}_k(x),$$

wo

$$(29.) \qquad \mathfrak{P}_k(x) = (\mathfrak{P}_1(x))^k + x^m Q(x).$$

$\mathfrak{P}_1(x)$ und $Q(x)$ bedeuten Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen fortschreiten. $\mathfrak{P}_1(x)$ nimmt für $x = 0$ den Werth $-mA_m$ an.

Da hier $m > 0$ *), so ist

$$(30.) \qquad \mathfrak{P}_k(0) = \mathfrak{P}_1(0)^k = (-mA_m)^k.$$

Dividiren wir nun die Gleichung (27.) durch y und benutzen den Ausdruck (28.) für $y^{(k)} : y$, so erhalten wir nach der Multiplication mit $x^{n(m+1)}$

$$(31.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{P}_n(x) + \left(\frac{(11)}{x} + \frac{(12)}{x^2} + \cdots + \frac{(1k_1)}{x^{k_1}}\right) x^{m+1}\mathfrak{P}_{n-1}(x) \\ \quad + \left(\frac{(22)}{x^2} + \frac{(23)}{x^3} + \cdots + \frac{(2k_2)}{x^{k_2}}\right) x^{2(m+1)}\mathfrak{P}_{n-2}(x) + \cdots \\ \cdots + \left(\frac{(nn)}{x^n} + \frac{(n, n+1)}{x^{n+1}} + \cdots + \frac{(n, k_n}{x^{k_n}}\right) x^{n(m+1)} = 0. \end{array} \right.$$

Aus dieser Gleichung, die identisch erfüllt sein muss, wenn ein Normalintegral existiren soll, erhellt, dass $m+1$ nicht grösser sein darf als die

---

*) $m = 0$ würde den Fall bedeuten, dass die Gleichung (27.) ein reguläres Integral habe, welches dann von der Form $x^\varrho\, G_0\left(\frac{1}{x}\right)$ wäre (G_0 eine ganze Function des Arguments); diesen Fall, dessen Bedingungen leicht zu discutiren sind, schliessen wir aus.

grösste der Zahlen

$$(32.) \qquad k_1, \quad \frac{k_2}{2}, \quad \frac{k_3}{3}, \quad \ldots \quad \frac{k_n}{n};$$

denn wenn $m+1$ grösser als jede dieser Zahlen ist, so erhält man, indem man in (31.) $x = 0$ setzt, nach (30.)

$$\mathfrak{P}_n(0) = (-m A_m)^n = 0,$$

also

$$A_m = 0.$$

Indem wir nun annehmen, dass

$$\frac{k_\lambda}{\lambda} \leqq m+1,$$

können wir der Gleichung (27.) folgende Gestalt geben

$$(33.) \quad \begin{cases} y^{(n)} + \left(\frac{(11)}{x} + \frac{(12)}{x^2} + \cdots + \frac{(1, m+1)}{x^{m+1}}\right) y^{(n-1)} \\ \quad + \left(\frac{(22)}{x^2} + \frac{(23)}{x^3} + \cdots + \frac{(2, 2(m+1))}{x^{2(m+1)}}\right) y^{(n-2)} + \cdots \\ \cdots + \left(\frac{(n-1, n-1)}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{(n-1, (n-1)(m+1))}{x^{(n-1)(m+1)}}\right) y' \\ \quad + \left(\frac{(n, n)}{x^n} + \frac{(n, n+1)}{x^{n+1}} + \cdots + \frac{(n, n(m+1))}{x^{n(m+1)}}\right) y = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung (33.) ist in dem Fall enthalten, den Herr *Cayley* a. a. O. betrachtet, indem er festsetzt, dass die höchsten Grade der Coefficienten der Differentialgleichung in Bezug auf $\frac{1}{x}$ in arithmetischem Verhältnisse wachsen sollen. Die determinirende Gleichung (24.) für die Exponenten ϱ lautet jetzt

$$(33^a.) \quad \begin{cases} \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-(n-1)) + (11)\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-(n-2)) + \cdots \\ \qquad \cdots + (n-1, n-1)\varrho + (n, n) = 0. \end{cases}$$

Wenn man die Gleichung (33.) durch y dividirt und mit x multiplicirt, so erhält man mit Benutzung des Ausdruckes (28.) für $y^{(k)} : y$ die identische Gleichung

$$(34.) \qquad \mathfrak{P}_n(x) + p_1 \mathfrak{P}_{n-1}(x) + p_2 \mathfrak{P}_{n-2}(x) + \cdots + p_{n-1} \mathfrak{P}_1(x) + p_n = 0,$$

worin $p_1, \ldots p_n$ die folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned}
p_1 &= (11)x^m+(1,2)x^{m-1} \quad +\cdots+(1,m+1),\\
&\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots\\
p_\sigma &= (\sigma\sigma)x^{\sigma m}+(\sigma,\sigma+1)x^{\sigma m-1}+\cdots+(\sigma,\sigma(m+1)),\\
&\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots\\
p_n &= (nn)x^{nm}+(n,n+1)x^{nm-1}+\cdots+(n,n(m+1)).
\end{aligned}$$

Setzt man in (34.) $x=0$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{P}_n(0)+(1,m+1)\mathfrak{P}_{n-1}(0)+(2,2(m+1))\mathfrak{P}_{n-2}(0)+\cdots\\
&\cdots+(n-1,(n-1)(m+1))\mathfrak{P}_1(0)+(n,n(m+1)) = 0
\end{aligned}$$

und hieraus vermöge der Relation (30.)

$$(35.)\quad \left\{\begin{aligned}
&(-mA_m)^n+(1,m+1)(-mA_m)^{n-1}+\cdots\\
&\cdots+(n-1,(n-1)(m+1))(-mA_m)+(n,n(m+1)) = 0,
\end{aligned}\right.$$

eine Gleichung zur Bestimmung von A_m, die auch Herr *Cayley* angegeben hat. Sie giebt im Allgemeinen n Werthe für A_m. Wir sind aber im Stande, mittelst des vorausgeschickten Hülfssatzes, der uns die Relation (29.)

$$\mathfrak{P}_k(x) = (\mathfrak{P}_1(x))^k+x^m Q_k(x)$$

ergeben hat, worin $Q_k(x)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe bedeutet, nicht nur den Coefficienten A_m, sondern sämmtliche Coefficienten des Exponenten $G\left(\frac{1}{x}\right)$ zu bestimmen. Denkt man sich nämlich die linke Seite von (34.) nach steigenden Potenzen von x geordnet, so kann man, soweit es sich um die m ersten Glieder, die mit

$$x^0,\quad x^1,\quad \ldots\quad x^{m-1}$$

behaftet sind, handelt, zunächst vermöge (29.) $\mathfrak{P}_k(x)$ durch $(\mathfrak{P}_1(x))^k$ ersetzen, und von $\mathfrak{P}_1(x)$ wiederum braucht man nur die m ersten Glieder beizubehalten.

Nun ist nach (26.) und (28.)

$$\mathfrak{P}_1(x) = x^{m+1}\frac{y'}{y} = -mA_m-(m-1)A_{m-1}x-\cdots-A_1x^{m-1}+Ax^m+a_0x^{m+1}+\cdots,$$

die m ersten Glieder von $\mathfrak{P}_1(x)$ sind also

$$-mA_m-(m-1)A_{m-1}x-(m-2)A_{m-2}x^2-\cdots-A_1x^{m-1}.$$

Nach dem Ausdrucke (27^a.) für $G\left(\frac{1}{x}\right)$ ist aber das Aggregat dieser Glieder

nichts Anderes als die Function

$$u = x^{m+1} \frac{dG\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}.$$

Man wird also, um u zu erhalten, für die durch die algebraische Gleichung

$$(36.) \qquad v^n + p_1 v^{n-1} + p_2 v^{n-2} + \cdots + p_n = 0$$

bestimmte Function v eine Entwickelung nach ganzen positiven Potenzen von x, wenn sie möglich ist, zu suchen haben. Das Aggregat der m ersten Glieder einer solchen Entwickelung liefert einen Ausdruck für u. Mit u ist dann auch $G\left(\frac{1}{x}\right)$ durch die Festsetzung, dass es kein von x unabhängiges Glied enthalte, vollständig bestimmt. Setzt man in (36.) $x = 0$, so erhält man für das erste (von x freie) Glied der Entwickelung die Gleichung

$$v_0^n + (1,\ m+1) v_0^{n-1} + (2,\ 2(m+1)) v_0^{n-2} + \cdots + (n,\ n(m+1)) = 0,$$

welche mit der Gleichung (35.) für $-mA_m$, das erste Glied in u, zusammenfällt, wie vorauszusehen war. Hat diese Gleichung lauter ungleiche Wurzeln, so giebt es n Entwickelungen von v nach aufsteigenden ganzen positiven Potenzen von x, und die Aggregate der m ersten Glieder in jeder derselben (d. h. bis zu dem mit x^{m-1} behafteten Gliede incl.) liefern n verschiedene Ausdrücke für u und damit für G. Sind mehrere Wurzeln der Gleichung (35.) einander gleich, so enthalten die entsprechenden Entwickelungen im Allgemeinen gebrochene Potenzen von x. Wenn in diesem Falle eine Entwickelung zunächst mit ganzen Potenzen von x beginnen und erst die auf x^{m-1} folgenden Glieder gebrochene Potenzen von x enthalten sollten, so würde auch hier das Aggregat der m ersten Glieder einen Ausdruck für u und hierdurch für G liefern. Wir werden aber weiterhin sehen, dass für eine vielfache Wurzel der Gleichung (35.) der zugehörige Werth des Exponenten A im Allgemeinen unendlich gross wird, also eine Darstellung des Integrals in der Form (25.) nicht zu Stande kommt, weshalb wir hier bei der allgemeinen Betrachtung uns auf die ungleichen Wurzeln der erwähnten Gleichung beschränken werden, von denen jede zu einem bestimmten Ausdruck für $G\left(\frac{1}{x}\right)$ führt.

Den Gedanken, zur Behandlung der vorliegenden Differentialgleichung

die Discussion der algebraischen Gleichung (36.) heranzuziehen, hat Herr *Cayley* angedeutet *), ohne jedoch einen weiteren Gebrauch davon zu machen als die Ableitung der Gleichung (35.) zur Bestimmung des Coefficienten A_m in G. Wie eben gezeigt, lässt sich mit ihrer Hülfe das Polynom G in seiner Gesammtheit herstellen.

Es ist für unseren Zweck wichtig, nachdem einer der Ausdrücke $G\left(\frac{1}{x}\right)$ im Normalintegral (25.) fixirt ist, den Werth des zugehörigen Exponenten A von x **) auf directem Wege zu bestimmen.

Erinnern wir zunächst daran, dass

$$x^{m+1}\frac{De^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}{e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}} = x^{m+1}\frac{dG\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -mA_m-(m-1)A_{m-1}x-\cdots-A_1x^{m-1}$$

ist, und dass nach dem obigen Hülfssatz

$$x^{\lambda(m+1)}\frac{D^\lambda e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}{e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}},$$

wo D^λ den λten Differentialquotienten nach x bezeichnet, mit

$$x^{\lambda(m+1)}\left(\frac{De^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}{e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}\right)^\lambda = x^{\lambda(m+1)}\left(\frac{dG\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}\right)^\lambda$$

in den m ersten Gliedern der Entwickelung nach steigenden Potenzen von x übereinstimmt. Hieraus folgt, dass in denselben Gliedern

$$x^{\lambda(m+1)}\frac{D^\lambda e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}{e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}} \quad \text{durch} \quad \left(x^{m+1}\frac{dG\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}\right)^\lambda$$

ersetzt werden kann.

Wir schreiben jetzt die Differentialgleichung (33.), nachdem wir sie mit $x^{n(m+1)}$ multiplicirt haben, in der Form

---

*) a. a. O. p. 287. Vgl. auch *Thomé* dieses Journal, Bd. 76, p. 292 No. 6, wo diese Gleichung bereits zur Bestimmung der einzelnen Glieder des Polynoms G benutzt ist.

**) „But I do not see any direct or simple way of obtaining the corresponding equation for the exponent A of this subregular integral." *Cayley* a. a. O. p. 292.

$$(37.)\quad x^{n(m+1)}y^{(n)}+p_1x^{(n-1)(m+1)}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}x^{m+1}y'+p_ny\ =\ 0,$$

worin, wie oben,

$$(37^a.)\quad \begin{cases} p_1 &= (11)x^m+(12)x^{m-1}+\cdots+(1,\ m+1), \\ \vdots & \quad\vdots \\ p_\sigma &= (\sigma\sigma)x^{\sigma m}+(\sigma,\ \sigma+1)x^{\sigma m-1}+\cdots+(\sigma,\ \sigma(m+1)), \\ \vdots & \quad\vdots \\ p_n &= (nn)x^{nm}+(n,\ n+1)x^{nm-1}+\cdots+(n,\ n(m+1)), \end{cases}$$

und substituiren in der Gleichung (37.):

$$(38.)\quad y\ =\ e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}\eta,$$

so wird, wenn wir zur Abkürzung

$$x^{\lambda(m+1)}\frac{D^\lambda e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}{e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}\ =\ P_\lambda(x)$$

setzen:

$$\begin{aligned} y' &= e^G\left(\eta'+\eta\frac{P_1}{x^{m+1}}\right), \\ y'' &= e^G\left(\eta''+2\eta'\frac{P_1}{x^{m+1}}+\eta\frac{P_2}{x^{2(m+1)}}\right), \\ \vdots &\quad\ \vdots \\ y^{(n)} &= e^G\left\{\eta^{(n)}+n\eta^{(n-1)}\frac{P_1}{x^{m+1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\eta^{(n-2)}\frac{P_2}{x^{2(m+1)}}+\cdots\right. \\ &\qquad \left.\cdots+n\eta'\frac{P_{n-1}}{x^{(n-1)(m+1)}}+\eta\frac{P_n}{x^{n(m+1)}}\right\}. \end{aligned}$$

Die Gleichung (37.) wird demnach durch die Substitution (38.) transformirt in

$$(39.)\quad \begin{cases} x^{n(m+1)}\eta^{(n)}+(nP_1+p_1)x^{(n-1)(m+1)}\eta^{(n-1)} \\ \qquad +\left(\frac{n(n-1)}{1.2}P_2+(n-1)P_1p_1+p_2\right)x^{(n-2)(m+1)}\eta^{(n-2)}+\cdots \\ \cdots+\left(nP_{n-1}+(n-1)P_{n-2}p_1+\cdots+2P_1p_{n-2}+p_{n-1}\right)x^{m+1}\eta' \\ \quad +(P_n+P_{n-1}p_1+P_{n-2}p_2+\cdots+P_1p_{n-1}+p_n)\eta\ =\ 0. \end{cases}$$

Der Coefficient von η geht aus der linken Seite von (34.) hervor, indem man $\mathfrak{P}_\lambda$ mit P_λ vertauscht. Da nun nach dem Vorhergehenden P_λ mit $\mathfrak{P}_\lambda$ in den m ersten Gliedern der Entwickelung nach steigenden Potenzen von x übereinstimmt, der Ausdruck auf der linken Seite von (34.) aber identisch verschwindet, so folgt, dass der Coefficient von η nach steigenden Potenzen

von x geordnet, mit x^m beginnt. Setzt man nun, um die Coefficienten A, B_0, B_1, ... im Normalintegral (25.) zu bestimmen, in (39.)

$$\eta = x^A(B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots),$$

so wird

$$(39^a.)\quad \begin{cases} \dfrac{\eta}{x^A} = B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots = u_0, \\ \dfrac{\eta'}{x^{A-1}} = AB_0+(A+1)B_1x+(A+2)B_2x^2+\cdots = u_1, \\ \dfrac{\eta''}{x^{A-2}} = A(A-1)B_0+(A+1)AB_1x+(A+2)(A+1)B_2x^2+\cdots = u_2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{\eta^{(n)}}{x^{A-n}} = A(A-1)\ldots(A-(n-1))B_0+(A+1)A\ldots(A+1-(n-1))B_1x \\ \qquad\qquad +(A+2)(A+1)\ldots(A+2-(n-1))B_2x^2+\cdots = u_n. \end{cases}$$

Durch Division mit x^{A+m} geht dann die Gleichung (39.) über in

$$(40.)\quad \begin{cases} x^{m(n-1)}u_n+(nP_1+p_1)x^{m(n-2)}u_{n-1}+\cdots \\ \cdots+(nP_{n-1}+(n-1)P_{n-2}p_1+\cdots+2P_1p_{n-2}+p_{n-1})u_1 \\ +\dfrac{P_n+P_{n-1}p_1+P_{n-2}p_2+\cdots+P_1p_{n-1}+p_n}{x^m}u_0 = 0, \end{cases}$$

worin zufolge der obigen Bemerkung der Coefficient von u_0 eine ganze Function ist. Setzt man in (40.) $x=0$ und berücksichtigt, dass die Coefficienten von u_2, u_3, ... u_n resp. x^m, x^{2m}, ... $x^{(n-1)m}$ zum Factor haben, also für $x=0$ verschwinden, so erhält man

$$B_0\Big\{A[nP_{n-1}(0)+(n-1)P_{n-2}(0)(1,m+1)+\cdots$$
$$\cdots+2P_1(0)(n-2,(n-2)(m+1))+(n-1,(n-1)(m+1))]$$
$$+\left|\frac{P_n+P_{n-1}p_1+P_{n-2}p_2+\cdots+P_1p_{n-1}+p_n}{x^m}\right|_{x=0}\Big\} = 0,$$

und da B_0 wesentlich von Null verschieden, so erhält man durch vorstehende Gleichung den gesuchten Ausdruck für A. Der Coefficient von A ist nach dem Obigen gleich

$$nP_1^{n-1}(0)+(n-1)P_1^{n-2}(0)(1,m+1)+\cdots$$
$$\cdots+2P_1(0)(n-2,(n-2)(m+1))+(n-1,(n-1)(m+1))$$
$$=n(-mA_m)^{n-1}+(n-1)(-mA_m)^{n-2}(1,m+1)+\cdots$$
$$\cdots+2(-mA_m)(n-2,(n-2)(m+1))+(n-1,(n-1)(m+1)),$$

welcher Ausdruck nur gleich Null wird, wenn $-mA_m$ eine vielfache Wurzel

der Gleichung (35.) ist. Für jede einfache Wurzel derselben, zu der, wie wir gesehen haben, stets ein zugeordneter Ausdruck für die Function $G\left(\frac{1}{x}\right)$ existirt, erhalten wir also mittelst der Coefficienten dieser Function auch stets einen endlichen zugehörigen Werth für den Exponenten A in der Form *)

$$(41.) \qquad A = -\left|\frac{\varphi(x)}{x^m}\right|_0 : (A_m),$$

worin

$$\varphi(x) = P_n(x)+P_{n-1}(x)p_1+\cdots+P_1(x)p_{n-1}+p_n,$$

$$P_\lambda(x) = x^{\lambda(m+1)}\frac{D^\lambda e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}{e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}$$

und

$$(A_m) = n(-mA_m)^{n-1}+(n-1)(-mA_m)^{n-2}(1, m+1)+\cdots$$
$$\cdots+2(-mA_m)(n-2, (n-2)(m+1))+(n-1, (n-1)(m+1))$$

ist. $p_1, \ldots p_m$ sind die in (37^a.) angegebenen Polynome. $\varphi(x)$ ist durch x^m theilbar.

Es erübrigt noch die Bestimmung der Coefficienten $B_0, B_1, \ldots$. Durch Einsetzen der Ausdrücke (39^a.) für $u_0, u_1, \ldots u_n$ in (40.) erhalten wir homogene lineare Gleichungen zwischen diesen Coefficienten, durch welche wir, nachdem nunmehr A bekannt ist, $B_1, B_2, \ldots$ successive durch B_0 linear ausdrücken können. Bemerken wir zuvor, dass $x^{\lambda m-1}$ die höchste Potenz von x in P_λ ist. Denn

$$P_1 = x^{m+1}\frac{dG\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -A_1x^{m-1}+ \text{ Glieder mit niedrigeren Potenzen von } x.$$

Ist nun der Satz für λ wahr, also

$$P_\lambda = x^{\lambda(m+1)}\frac{D^\lambda e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}{e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}} = ax^{\lambda m-1}+\cdots,$$

dann ist

$$D^\lambda e^{G\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}(ax^{-1-\lambda}+\cdots)$$

*) Vgl. *Thomé,* dieses Journal, Bd. 76, No. 6.

und hieraus

$$D^{\lambda+1}e^{G\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}\{cx^{-2-\lambda}+\cdots\},$$

in Berücksichtigung dessen, dass x^{-2} die höchste Potenz in $DG\left(\frac{1}{x}\right)$ ist. Folglich

$$P_{\lambda+1} = \frac{x^{(\lambda+1)(m+1)}D^{\lambda+1}e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}{e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}} = Cx^{(\lambda+1)m-1}+\cdots,$$

wodurch der Satz auch für $\lambda+1$ bewiesen ist. Vermöge dieses Satzes erkennen wir, dass die höchste Potenz von x, die in den Coefficienten von u_n, u_{n-1}, ... u_0 in (40.) vorkommt, $x^{m(n-1)}$ ist. In der aus der linken Seite von (40.) durch die Substituirung der Werthe (39^a.) für die u hervorgehenden Reihe enthält daher das mit $x^{k+m(n-1)}$ multiplicirte Glied nur die Coefficienten

$$B_k, \quad B_{k+1}, \quad B_{k+2}, \quad \ldots \quad B_{k+m(n-1)},$$

und zwar ist B_k multiplicirt mit

$$(42.) \quad \begin{cases} f_k = (A+k)(A+k-1)\ldots(A+k-(n-1)) \\ \quad +(11)(A+k)(A+k-1)\ldots(A+k-(n-2))+\cdots \\ \cdots+(n-1,\ n-1)(A+k)+(n,\ n), \end{cases}$$

wenn man beachtet, dass zufolge desselben Satzes $x^{m(n-1)-1}$ die höchste Potenz in $P_\lambda x^{m(n-\lambda-1)}$ ist, mithin bei der Bildung des Coefficienten von B_k kein P_λ und von p_1, ... p_n nur die mit den höchsten Potenzen von x multiplicirten Glieder betheiligt sind. f_k ist vom $n$ten Grade in Beziehung auf k, die Factoren von B_{k+1}, B_{k+2}, ... $B_{k+m(n-1)}$ sind, da an ihnen u_n nicht betheiligt ist, von niedrigerem als dem $n$ten Grade in k. Der Coefficient von $x^{k+m(n-1)}$ in (40.), gleich Null gesetzt, ergiebt daher zwischen den B eine Gleichung von der Form

$$(43.) \quad f_kB_k+f_{k+1}B_{k+1}+\cdots+f_{k+m(n-1)}B_{k+m(n-1)} = 0,$$

worin f_k das Polynom (42.) vom. Grade n, f_{k+1}, ... $f_{k+m(n-1)}$ Polynome von niedrigerem Grade in k bezeichnen.

Aus dieser Form der Recursionsgleichung ersieht man leicht, dass der Quotient $B_{k+1} : B_k$ sich mit unendlich wachsendem k keinem endlichen Grenzwerth nähern kann. Denn sonst hätte auch

$$\frac{B_{k+\lambda}}{B_k} = \frac{B_{k+1}}{B_k}\cdot\frac{B_{k+2}}{B_{k+1}}\cdots\frac{B_{k+\lambda}}{B_{k+\lambda-1}}$$

für $k = \infty$ einen endlichen Werth, während $f_{k+\lambda} : f_k$ für $k = \infty$ verschwindet. Es müsste daher auch

$$\frac{f_{k+1}}{f_k}\frac{B_{k+1}}{B_k} + \frac{f_{k+2}}{f_k}\frac{B_{k+2}}{B_k} + \cdots + \frac{f_{k+m(n-1)}}{f_k}\frac{B_{k+m(n-1)}}{B_k}$$

für $k = \infty$ verschwinden, was mit der Gleichung (43.) nicht vereinbar ist, da nach ihr diese Grösse den Werth -1 hat.

Hieraus folgt, dass eine mit den Coefficienten $B_0, B_1, \ldots$ gebildete unendliche Reihe

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots$$

für jeden von Null verschiedenen Werth von x divergiren muss. Ein Normalintegral von der Form (25.) kann demnach nur dann existiren, wenn diese Reihe sich auf eine ganze Function reducirt. Dieses Ergebniss ist nur eine directe Bestätigung der Folgerungen, die wir bereits oben aus der Reihenform

$$y = x^{\varrho}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

für die Integrale der Gleichung (23.) gezogen haben.

Soll aber die Reihe

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots$$

eine endliche sein, etwa aus $k+1$ Gliedern bestehen, so dass B_{k+1} und alle folgenden Coefficienten verschwinden, so muss zufolge der Recursionsformel (43.)

$$f_k = (A+k)(A+k-1)\ldots(A+k-(n-1)) + (A+k)(A+k-1)\ldots(A+k-(n-2))(11) + \cdots$$
$$\cdots + (A+k)(n-1,\ n-1) + (n,\ n) = 0$$

sein. Mit anderen Worten:

Die determinirende Gleichung (33$^{\alpha}$.) für die vorliegende Differentialgleichung (33.)

$$\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-(n-1)) + \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-(n-2))(11) + \cdots + \varrho(n-1, n-1) + (n, n) = 0$$

muss eine Wurzel haben von der Form

$$\varrho = A+k,$$

wo k eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet. Dies war aber die andere Bedingung, die wir oben für die Existenz eines Normalintegrals von der Form (25.) abgeleitet haben, nur dass wir jetzt nach der Formel (41.) zu jedem der n möglichen Polynome $G\left(\frac{1}{x}\right)$ den zugehörigen Ausdruck für

A bestimmen können. Bemerken wir noch, dass in Folge der Voraussetzung, wonach nicht zwei Wurzeln der determinirenden Gleichung sich bloss um ganze Zahlen von einander unterscheiden sollen, die Bedingung

$$\varrho = A+k,$$

falls sie für ein gegebenes A erfüllbar ist, nur durch eine einzige Wurzel ϱ erfüllt werden kann, wodurch dann auch die positive ganze Zahl k vollständig bestimmt ist. So viele also unter den n möglichen Normalintegralen existiren, so viele Wurzeln der determinirenden Gleichung sind mit ihnen, eine jede einem derselben entsprechend, verknüpft, und der Grad k der zugehörigen ganzen Function u_0 durch die Relation

$$k = \varrho - A$$

gegeben. Zur Bestimmung der k Verhältnisse zwischen den Coefficienten

$$B_0, \quad B_1, \quad \ldots \quad B_k$$

der Function u_0 erhält man durch Einsetzen der Werthe (39ª.) für $u_0, u_1, \ldots u_n$ in (40.), worin A jetzt bekannt ist, $k+m(n-1)-1$ lineare Gleichungen, indem die Coefficienten von $x^1, x^2, \ldots x^{k+m(n-1)-1}$ auf der linken Seite von (40.) einzeln gleich Null gesetzt werden. (Der Coefficient von x^0, gleich Null gesetzt, ergab die Bestimmung von A). Da die Anzahl dieser Gleichungen um $m(n-1)-1$ grösser ist als die Zahl der Unbekannten, so kommt zur Bedingung $k = \varrho - A$ noch die der Verträglichkeit dieser Gleichungen hinzu, was die Erfüllung von weiteren $m(n-1)-1$ Gleichungen erfordert.

Abgesehen von dem Falle $m = 0$, der die unmittelbar zu integrirende Gleichung

$$y^{(n)} + \frac{(11)}{x} y^{(n-1)} + \frac{(22)}{x^2} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{(nn)}{x^n} y = 0$$

liefert, die lauter reguläre Integrale hat, sind es nur die Fälle $m = 1$, $n = 1$ und $m = 1$, $n = 2$, in welchen zu der Bedingung $k = \varrho - A$ keine weiteren Bedingungen für die Existenz eines Normalintegrals erforderlich sind. Im ersten Falle lautet die Gleichung

$$y' + \left(\frac{(11)}{x} + \frac{(12)}{x^2} + \cdots + \frac{(1, m+1)}{x^{m+1}}\right) y = 0.$$

Hier ist $\varrho = A = -(11)$, also die erste Bedingung von selbst erfüllt, indem $k = 0$ ist, und man erhält

$$y = x^{-(11)} e^{G\left(\frac{1}{x}\right)},$$

wo

$$G\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(12)}{x} + \frac{2(1,3)}{x^2} + \cdots + \frac{m(1,m+1)}{x^m},$$

die Function u_0 wird hier also eine Constante.

Im zweiten Falle wird die Gleichung

$$y'' + \left(\frac{(11)}{x} + \frac{(12)}{x^2}\right)y' + \left(\frac{(22)}{x^2} + \frac{(23)}{x^3} + \frac{(24)}{x^4}\right)y = 0.$$

Dahin gehört die im ersten Abschnitt behandelte Gleichung.

Hierher gehört auch die *Riccati*sche Gleichung. Denn die Gleichung

$$(44.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2-2m}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{h}{x^4}y$$

geht durch die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi}$$

über in die Gleichung

$$(45.) \qquad \frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{2m}{\xi}\frac{dy}{d\xi} = hy,$$

welche eine der Formen ist, auf die die *Riccati*sche Gleichung zurückgeführt wird. Die Fundamentalgleichung für die Exponenten, zu denen die Integrale von (44.) gehören, ist

$$\varrho(\varrho-1) + (2-2m)\varrho = 0,$$

ihre Wurzeln sind also

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = 2m-1.$$

Ferner findet sich

$$A_1 = \sqrt{h}, \quad A = m.$$

Die Bedingung also für die Existenz eines Normalintegrals ist

$$m+k = 0 \quad \text{oder} \quad m+k = 2m-1.$$

Da keine dieser Bedingungsgleichungen $\sqrt{h}$ enthält, so folgt jedesmal, wo eine derselben erfüllt ist, die Existenz zweier Normalintegrale. So oft also m eine ganze positive oder negative Zahl oder Null ist, ist das allgemeine Integral der Gleichung (44.), also auch der *Riccati*schen (45.) in endlicher Form darstellbar.

Das Ergebniss der vorhergehenden Untersuchungen besteht demnach in Folgendem:

A bestimmen können. Bemerken wir noch, dass in Folge der Voraussetzung, wonach nicht zwei Wurzeln der determinirenden Gleichung sich bloss um ganze Zahlen von einander unterscheiden sollen, die Bedingung

$$\varrho = A+k,$$

falls sie für ein gegebenes A erfüllbar ist, nur durch eine einzige Wurzel ϱ erfüllt werden kann, wodurch dann auch die positive ganze Zahl k vollständig bestimmt ist. So viele also unter den n möglichen Normalintegralen existiren, so viele Wurzeln der determinirenden Gleichung sind mit ihnen, eine jede einem derselben entsprechend, verknüpft, und der Grad k der zugehörigen ganzen Function u_0 durch die Relation

$$k = \varrho - A$$

gegeben. Zur Bestimmung der k Verhältnisse zwischen den Coefficienten

$$B_0, \quad B_1, \quad \ldots \quad B_k$$

der Function u_0 erhält man durch Einsetzen der Werthe (39^a.) für $u_0, u_1, \ldots u_n$ in (40.), worin A jetzt bekannt ist, $k+m(n-1)-1$ lineare Gleichungen, indem die Coefficienten von $x^1, x^2, \ldots x^{k+m(n-1)-1}$ auf der linken Seite von (40.) einzeln gleich Null gesetzt werden. (Der Coefficient von x^0, gleich Null gesetzt, ergab die Bestimmung von A). Da die Anzahl dieser Gleichungen um $m(n-1)-1$ grösser ist als die Zahl der Unbekannten, so kommt zur Bedingung $k = \varrho - A$ noch die der Verträglichkeit dieser Gleichungen hinzu, was die Erfüllung von weiteren $m(n-1)-1$ Gleichungen erfordert.

Abgesehen von dem Falle $m = 0$, der die unmittelbar zu integrirende Gleichung

$$y^{(n)} + \frac{(11)}{x} y^{(n-1)} + \frac{(22)}{x^2} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{(nn)}{x^n} y = 0$$

liefert, die lauter reguläre Integrale hat, sind es nur die Fälle $m = 1$, $n = 1$ und $m = 1$, $n = 2$, in welchen zu der Bedingung $k = \varrho - A$ keine weiteren Bedingungen für die Existenz eines Normalintegrals erforderlich sind. Im ersten Falle lautet die Gleichung

$$y' + \left(\frac{(11)}{x} + \frac{(12)}{x^2} + \cdots + \frac{(1, m+1)}{x^{m+1}}\right) y = 0.$$

Hier ist $\varrho = A = -(11)$, also die erste Bedingung von selbst erfüllt, indem $k = 0$ ist, und man erhält

$$y = x^{-(11)} e^{G\left(\frac{1}{x}\right)},$$

wo

$$G\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(12)}{x} + \frac{2(1,3)}{x^2} + \cdots + \frac{m(1,m+1)}{x^m},$$

die Function u_0 wird hier also eine Constante.

Im zweiten Falle wird die Gleichung

$$y'' + \left(\frac{(11)}{x} + \frac{(12)}{x^2}\right)y' + \left(\frac{(22)}{x^2} + \frac{(23)}{x^3} + \frac{(24)}{x^4}\right)y = 0.$$

Dahin gehört die im ersten Abschnitt behandelte Gleichung.

Hierher gehört auch die *Riccati*sche Gleichung. Denn die Gleichung

$$(44.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2-2m}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{h}{x^4}y$$

geht durch die Substitution

$$x = \frac{1}{\xi}$$

über in die Gleichung

$$(45.) \qquad \frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{2m}{\xi}\frac{dy}{d\xi} = hy,$$

welche eine der Formen ist, auf die die *Riccati*sche Gleichung zurückgeführt wird. Die Fundamentalgleichung für die Exponenten, zu denen die Integrale von (44.) gehören, ist

$$\varrho(\varrho-1) + (2-2m)\varrho = 0,$$

ihre Wurzeln sind also

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = 2m-1.$$

Ferner findet sich

$$A_1 = \sqrt{h}, \quad A = m.$$

Die Bedingung also für die Existenz eines Normalintegrals ist

$$m+k = 0 \quad \text{oder} \quad m+k = 2m-1.$$

Da keine dieser Bedingungsgleichungen $\sqrt{h}$ enthält, so folgt jedesmal, wo eine derselben erfüllt ist, die Existenz zweier Normalintegrale. So oft also m eine ganze positive oder negative Zahl oder Null ist, ist das allgemeine Integral der Gleichung (44.), also auch der *Riccati*schen (45.) in endlicher Form darstellbar.

Das Ergebniss der vorhergehenden Untersuchungen besteht demnach in Folgendem:

Die Gleichung

$$y^{(n)}+\Big(\frac{(11)}{x}+\frac{(12)}{x^2}+\cdots+\frac{(1,m+1)}{x^{m+1}}\Big)y^{(n-1)}$$
$$+\Big(\frac{(22)}{x^2}+\frac{(23)}{x^3}+\cdots+\frac{(2,2(m+1))}{x^{2(m+1)}}\Big)y^{(n-2)}+\cdots$$
$$\cdots+\Big(\frac{(nn)}{x^n}+\frac{(n,n+1)}{x^{n+1}}+\cdots+\frac{(n,n(m+1))}{x^{n(m+1)}}\Big)y \;=\; 0$$

hat zu Integralen das Fundamentalsystem

$$x^{\varrho_1}\varphi_1\Big(\frac{1}{x}\Big),\quad x^{\varrho_2}\varphi_2\Big(\frac{1}{x}\Big),\quad \ldots\quad x^{\varrho_n}\varphi_n\Big(\frac{1}{x}\Big),$$

worin $\varrho_1, \ldots \varrho_n$ die Wurzeln der determinirenden Gleichung

$$\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-(n-1))+\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-(n-2))(11)+\cdots$$
$$\cdots+\varrho(n-1,n-1)+(n,n) \;=\; 0$$

sind. $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ bezeichnen nach ganzen positiven Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihen, die für jeden Werth von x ausser für $x=0$ convergiren und für $x=\infty$ nicht verschwinden. Der Einfachheit wegen ist angenommen, dass nicht zwei der Wurzeln ϱ sich bloss um ganze Zahlen von einander unterscheiden.

Soll der Differentialgleichung durch ein Normalintegral genügt werden, so muss dieses durch den geschlossenen Ausdruck

$$(46.)\qquad y \;=\; x^A e^{G\left(\frac{1}{x}\right)} f(x)$$

darstellbar sein, worin

$$G\Big(\frac{1}{x}\Big) \;=\; \frac{A_m}{x^m}+\frac{A_{m-1}}{x^{m-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x}$$

und $f(x)$ eine ganze Function bedeutet. Zur Bestimmung von G dienen die in der Umgebung von $x=0$ gültigen Entwickelungen der durch die algebraische Gleichung

$$v^n+p_1v^{n-1}+p_2v^{n-2}+\cdots+p_n \;=\; 0$$

definirten Function v; hierin ist

$$p_\sigma \;=\; (\sigma\sigma)x^{\sigma m}+(\sigma,\ \sigma+1)x^{\sigma m-1}+(\sigma,\ \sigma+2)x^{\sigma m-2}+\cdots+(\sigma,\ \sigma(m+1))\quad (\sigma=1, 2, \ldots n),$$

wobei zu beachten, dass für den vorliegenden Zweck von den Polynomen p_σ die mit x^m und höheren Potenzen von x behafteten Glieder fortgelassen werden können. Erste Bedingung für die Existenz eines Normalintegrals

ist, dass es eine Entwickelung von v nach aufsteigenden Potenzen von x giebt, die in ihren m ersten Gliedern die Form

$$a_0+a_1x+\cdots+a_{m-1}x^{m-1}$$

hat. Das Aggregat dieser Glieder setze man gleich

$$x^{m+1}\frac{dG\left(\frac{1}{x}\right)}{dx};$$

damit ist $G\left(\frac{1}{x}\right)$ vollständig bestimmt, wenn man noch festsetzt, dass $G\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x=\infty$ verschwinden soll. Der Coefficient A_m genügt der Gleichung $n$ten Grades

$$(-mA_m)^n+(1,\ m+1)(-mA_m)^{n-1}+\cdots$$
$$\cdots+(n-1,\ (n-1)(m+1))(-mA_m)+(n,\ n(m+1))\ =\ 0.$$

Jeder einfachen Wurzel dieser Gleichung ist stets, einer vielfachen nur in besonderen Fällen ein Polynom $G\left(\frac{1}{x}\right)$ zugeordnet. Ist $G\left(\frac{1}{x}\right)$ gefunden, so erhält man den zugehörigen Exponenten A durch den Ausdruck

$$A\ =\ -\left|\frac{\varphi(x)}{x^m}\right|_{x=0}:(A_m),$$

worin, wenn

$$\frac{x^{\lambda(m+1)}}{e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}\frac{d^\lambda e^{G\left(\frac{1}{x}\right)}}{dx^\lambda}\ =\ P_\lambda(x)$$

gesetzt wird,

$$\varphi(x)\ =\ P_n(x)+P_{n-1}(x)p_1+\cdots+P_1(x)p_{n-1}+p_n$$

und

$$(A_m)\ =\ n(-mA_m)^{n-1}+(n-1)(-mA_m)^{n-2}(1,\ m+1)+\cdots$$
$$\cdots+2(-mA_m)(n-2,\ (n-2)(m+1))+(n-1,\ (n-1)(m+1))$$

ist. $\varphi(x)$ ist durch x^m theilbar.

A ist stets endlich, wenn die zugehörige Wurzel der Gleichung für A_m einfach ist. Damit nun ein mit den gefundenen Exponenten $G\left(\frac{1}{x}\right)$ und A behaftetes Integral von der Form (46.) existire, ist ferner nothwendig, dass

$$\varrho-A\ =\ k,$$

wo $k=0$ oder eine positive ganze Zahl ist. ϱ ist eine Wurzel der determinirenden Gleichung; bei der obigen Annahme über die Beschaffenheit

ihrer Wurzeln kann dies für ein gegebenes A nur bei *einer* Wurzel ϱ statthaben. k giebt dann den Grad der entsprechenden ganzen Function an. Als letzte Bedingung tritt dann noch die Verträglichkeit gewisser unmittelbar aufzustellender linearer Gleichungen hinzu, deren Anzahl um $m(n-1)-1$ grösser ist als die Zahl der Unbekannten.

Zum Schluss sei noch eine Bemerkung hinsichtlich der Existenz endlicher Integrale mit gebrochenen Potenzen hinzugefügt, wovon ein Beispiel am Ende des ersten Abschnitts behandelt ist. Enthält die Entwickelung eines Zweiges der algebraischen Function v gebrochene Potenzen, und zwar gehe dieselbe nach ganzen positiven Potenzen von $x^{\frac{1}{\alpha}}$ fort, so setze man

$$x = \xi^{\alpha},$$

wodurch die betrachtete Differentialgleichung in eine solche von der nämlichen Beschaffenheit wie (33.) übergeht, nur dass m durch $m\alpha$ ersetzt ist. Die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung werden

$$\alpha\varrho_1, \quad \alpha\varrho_2, \quad \ldots \quad \alpha\varrho_n.$$

Die zugehörige algebraische Function v lässt dann eine Entwickelung nach ganzen positiven Potenzen von ξ zu, und das entsprechende Normalintegral, wenn es existirt, hat dann die Form

$$y = e^{G\left(\frac{1}{\xi}\right)} \xi^{A} f(\xi).$$

Die Bedingung für die Existenz desselben, in der Voraussetzung, dass $G\left(\frac{1}{\xi}\right)$ und A nach dem oben beschriebenen Verfahren bestimmt worden, lautet hier

$$A + k = \alpha\varrho,$$

wo ϱ eine der Wurzeln $\varrho_1, \ldots \varrho_n$ und k eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet. Hierzu treten dann noch die Bedingungsgleichungen dafür, dass die Differentialgleichung für

$$u = e^{-G\left(\frac{1}{\xi}\right)} \xi^{-A} y$$

durch eine ganze Function $k$ten Grades $f(\xi)$ befriedigt werde.

Setzt man für ξ seinen Werth $x^{\frac{1}{\alpha}}$ wieder ein, so erhält man

$$y = e^{G\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)} x^{\frac{A}{\alpha}} f(x^{\frac{1}{\alpha}}).$$

Dieses in gebrochenen Potenzen von x dargestellte Integral ist eine lineare Verbindung der zu α Wurzeln der determinirenden Gleichung gehörigen

Elemente des Fundamentalsystems in der Umgebung von $x = 0$. Ordnet man nämlich vorstehenden Ausdruck, nachdem man für $e^{G\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}$ die Reihe nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{x^\alpha}$ eingesetzt hat, in folgender Weise:

$$\begin{aligned} y = {} & x^{\frac{A+k}{\alpha}}\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \cdots\right) \\ & + x^{\frac{A+k-1}{\alpha}}\left(a_1 + \frac{b_1}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \cdots\right) \\ & \vdots \\ & + x^{\frac{A+k-(\alpha-1)}{\alpha}}\left(a_{\alpha-1} + \frac{b_{\alpha-1}}{x} + \frac{c_{\alpha-1}}{x^2} + \cdots\right), \end{aligned}$$

worin a von Null verschieden ist, $a_1, \ldots a_{\alpha-1}$ aber auch gleich Null sein können, so ist y eine lineare Function von zu $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\alpha$ gehörigen Elementen des Fundamentalsystems, wenn

$$\varrho_1 = \frac{A+k}{\alpha}, \quad \varrho_2 = \frac{A+k-1}{\alpha} - \delta_1, \quad \ldots \quad \varrho_\alpha = \frac{A+k-(\alpha-1)}{\alpha} - \delta_{\alpha-1},$$

wo $\delta_1, \ldots \delta_{\alpha-1}$ positive ganze Zahlen oder Null bedeuten ($\delta_\lambda = 0$, wenn a_λ von Null verschieden ist).

Diese Relationen sagen zugleich aus, dass die Differenz je zweier Wurzeln, zu denen die in y verbundenen Elemente gehören, eine rationale Zahl mit dem Nenner α sein muss.

Berlin, December 1887.

Druckfehler.

Seite 259, Zeile 4 v. u. $x^{n(m+1)}$ für x.
„ 268, „ 8 „ „ $m = 1$ zu streichen.

Ueber die für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stattfindenden algebraischen Beziehungen.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Herr *Fuchs* hat im 1. Bande der Acta Mathematica charakteristische Eigenschaften derjenigen linearen homogenen Differentialgleichungen dritter Ordnung entwickelt, für welche zwischen drei Fundamentalintegralen eine algebraische homogene Beziehung besteht; die vorliegende Untersuchung soll für eben diese Differentialgleichungen, sie mögen irreductibel oder reductibel sein, die Frage, und zwar nach einer auf lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung anwendbaren Methode, beantworten, ob algebraische Beziehungen zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen überhaupt existiren können und welcher Art diese sein müssen.

Um zunächst gewisse specielle Formen solcher Beziehungen ins Auge zu fassen, mögen einige allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt werden, die auch für die Theorie der allgemeinen algebraischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung von Interesse sind. Sei y_1 ein Integral einer in $y^{(m)}$ algebraisch irreductibeln Differentialgleichung $m$ter Ordnung

$$(1.) \qquad y^{(m)} = f(x, y, y', \dots y^{(m-1)}),$$

welches nicht schon einer Differentialgleichung niederer Ordnung genügt, und sei ein zweites Integral y_2 derselben eine irreductible algebraische Function von x, y_1 und dessen Ableitungen

$$(2.) \qquad y_2 = \omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}),$$

so ergiebt sich durch Einsetzen von y_2 in (1.) mit Benutzung der Beziehung

$$y_1^{(m)} = f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)})$$

und deren Differentialquotienten die algebraische Relation

$$(3.) \quad F\{x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(m-1)}\} = 0,$$

welche der für y_1 gemachten Annahme gemäss identisch sein muss; es folgt daraus, ***dass, wenn unter der Voraussetzung, dass*** η_1 ***irgend ein Integral der Differentialgleichung*** (1.) ***bedeutet,***

$$(4.) \quad \eta_2 = \omega(x, \eta_1, \eta_1', \ldots \eta_1^{(m-1)})$$

gesetzt wird, auch η_2 ***ein Integral eben dieser Differentialgleichung sein wird.***

Sei das $\eta_1 = y_2$ entsprechende Integral $\eta_2 = y_3$, entspreche weiter $\eta_2 = y_4$ dem $\eta_1 = y_3$, etc., so ergiebt sich eine Reihe von Integralen der Differentialgleichung (1.) in der Form

$$y_1, \quad y_2 = \omega(x, y_1, y_1', \ldots), \quad y_3 = \omega(x, y_2, y_2', \ldots), \quad y_4 = \omega(x, y_3, y_3', \ldots), \quad \ldots,$$

oder, wenn man in y_3 den Werth für y_2, in y_4 den eben erhaltenen für y_3, u. s. w. einsetzt und zur Abkürzung die Bezeichnung der iterirten Functionen einführt,

$$(a.) \quad y_1, \; y_2 = \omega(x, y_1, y_1', \ldots), \; y_3 = \omega^2(x, y_1, y_1', \ldots), \; y_4 = \omega^3(x, y_1, y_1', \ldots), \; \ldots$$

In der Gruppe (*a.*) sind sämmtliche Integrale algebraische Functionen des einen Integrales y_1 und dessen Ableitungen, und die Anzahl der Elemente dieser Gruppe wird im Allgemeinen unendlich gross sein, d. h. es wird sich im Allgemeinen keines der früheren Integrale durch Iterirung der ω-Function wiederholen; wird jedoch $y_{\sigma+1} = y_{\varrho+1}$, so erhält man

$$\omega(x, y_\sigma, y_\sigma', \ldots) = \omega(x, y_\varrho, y_\varrho', \ldots)$$

oder nach der angenommenen Bezeichnung

$$\omega^\sigma(x, y_1, y_1', \ldots) = \omega^\varrho(x, y_1, y_1', \ldots)$$

oder endlich, wenn $\sigma = \varrho + \delta$ ist,

$$(5.) \quad \omega^\delta(x, y_{\varrho+1}, y_{\varrho+1}', \ldots) = y_{\varrho+1}.$$

Da wir uns $\omega^\delta(x, y_{\varrho+1}, y_{\varrho+1}', \ldots)$ wieder vermöge (1.) auf eine algebraische Function von x, $y_{\varrho+1}$, $y_{\varrho+1}'$, $\ldots$ $y_{\varrho+1}^{(m-1)}$ reducirt denken können, so wird, wenn wir annehmen, dass $y_{\varrho+1}$ nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung von niederer Ordnung als der $m$ten Genüge leistet — und diese Bedingung wird unter der Annahme der Irreductibilität der Differentialgleichung (1.) jedenfalls erfüllt — die Gleichung (5.) eine identische, also durch jedes Integral der Differentialgleichung (1.) erfüllt sein, und somit wird auch die Beziehung bestehen

$$(6.) \quad \omega^\delta(x, y_1, y_1', \ldots) = y_1,$$

woraus sich unmittelbar

$$\omega^{r+\delta}(x, y_1, y_1', \ldots) = \omega^r(x, y_1, y_1', \ldots)$$

ergiebt. Für den Fall also, dass die Zahl der Elemente der Gruppe (*a.*) eine endliche ist, wird diese die Form annehmen

$$(b.) \quad y_1, \quad \omega(x, y_1, y_1', \ldots), \quad \omega^2(x, y_1, y_1', \ldots), \quad \ldots \quad \omega^{\delta-1}(x, y_1, y_1', \ldots),$$
$$\text{worin} \quad \omega^\delta(x, y_1, y_1', \ldots) = y_1$$

ist, und wir dürfen, wenn δ die kleinste Zahl ist, welche dieser Bedingung genügt, annehmen, dass alle Elemente der Gruppe unter einander verschieden sind.

Sei nun, gleichgültig ob die Anzahl der Elemente der Gruppe (*a.*) eine endliche oder unendliche ist, ein in dieser Gruppe nicht enthaltenes Integral η_1, so werden nach dem obigen Satze auch

$$(a_1.) \quad \eta_1, \quad \omega(x, \eta_1, \eta_1', \ldots), \quad \omega^2(x, \eta_1, \eta_1', \ldots), \quad \ldots$$

Integrale der Differentialgleichung (1.) sein, und für den Fall der Existenz der endlichen Gruppe (*b.*) wird auch wieder unter der Annahme der Irreductibilität der Differentialgleichung (1.) aus den oben angegebenen Gründen die endliche Integralgruppe folgen

$$(b_1.) \quad \eta_1, \quad \omega(x, \eta_1, \eta_1', \ldots), \quad \omega^2(x, \eta_1, \eta_1', \ldots), \quad \ldots \quad \omega^{\delta-1}(x, \eta_1, \eta_1', \ldots),$$
$$\text{worin} \quad \omega^\delta(x, \eta_1, \eta_1', \ldots) = \eta_1;$$

dass in dieser wieder sämmtliche Elemente verschieden sind, geht daraus hervor, dass die Gleichung

$$\omega^\sigma(x, \eta_1, \eta_1', \ldots) = \omega^\varrho(x, \eta_1, \eta_1', \ldots) \quad \text{auch} \quad \omega^\sigma(x, y_1, y_1', \ldots) = \omega^\varrho(x, y_1, y_1', \ldots)$$

nach sich ziehen würde, und ebenso einfach folgt, dass nicht zwei Elemente der Gruppen (*b.*) und (b_1.) einander gleich sein können, da aus der Annahme

$$\omega^\varkappa(x, \eta_1, \eta_1', \ldots) = \omega^\lambda(x, y_1, y_1', \ldots)$$

durch $(\delta-\varkappa)$-fache Iterirung

$$\omega^\delta(x, \eta_1, \eta_1', \ldots) = \eta_1 = \omega^{\delta-\varkappa+\lambda}(x, y_1, y_1', \ldots)$$

folgen würde, was wegen der Annahme, dass η_1 nicht schon in der Gruppe (*b.*) enthalten sein sollte, unstatthaft ist.

Fassen wir die gefundenen Resultate zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn für eine algebraische Differentialgleichung ein Integral eine irreductible algebraische Function ω eines anderen Integrales y_1, welches nicht schon einer Differentialgleichung niederer Ordnung genügt, dessen Ableitungen und der

unabhängigen Variabeln ist, so lassen sich die unendlich vielen Integrale der Differentialgleichung in Gruppen von der Form ordnen

$$(A.)\quad \begin{cases} \eta_1, & \omega(x, \eta_1, \eta_1', \ldots), & \omega^2(x, \eta_1, \eta_1', \ldots), & \ldots, \\ \eta_2, & \omega(x, \eta_2, \eta_2', \ldots), & \omega^2(x, \eta_2, \eta_2', \ldots), & \ldots, \\ \eta_3, & \omega(x, \eta_3, \eta_3', \ldots), & \omega^2(x, \eta_3, \eta_3', \ldots), & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

die im Allgemeinen unendlich viele Elemente enthalten werden; ist die Differentialgleichung irreductibel, so werden die Gruppen entweder die Form (A.) haben, oder wenn die Anzahl der Elemente einer Gruppe eine endliche ist, die Gestalt

$$(B.)\quad \begin{cases} \eta_1, & \omega(x, \eta_1, \eta_1', \ldots), & \omega^2(x, \eta_1, \eta_1', \ldots), & \ldots & \omega^{\delta-1}(x, \eta_1, \eta_1', \ldots), \\ & & \text{worin} & \omega^\delta(x, \eta_1, \eta_1', \ldots) = \eta_1, \\ \eta_2, & \omega(x, \eta_2, \eta_2', \ldots), & \omega^2(x, \eta_2, \eta_2', \ldots), & \ldots & \omega^{\delta-1}(x, \eta_2, \eta_2', \ldots), \\ & & \text{worin} & \omega^\delta(x, \eta_2, \eta_2', \ldots) = \eta_2, \\ \eta_3, & \omega(x, \eta_3, \eta_3', \ldots), & \omega^2(x, \eta_3, \eta_3', \ldots), & \ldots & \omega^{\delta-1}(x, \eta_3, \eta_3', \ldots), \\ & & \text{worin} & \omega^\delta(x, \eta_3, \eta_3', \ldots) = \eta_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

wobei jede Gruppe gleich viele und unter einander verschiedene Elemente enthält, und die Anzahl der Gruppen selbst unendlich gross ist.

Ist die Differentialgleichung (1.) eine lineare homogene, so dass jedes Integral sich als homogene lineare Function von m Fundamentalintegralen mit constanten Coefficienten ausdrücken lässt, so wird für den Fall, dass eines ihrer Integrale eine algebraische Function eines anderen und dessen Ableitungen ist, die aus demselben entstehende Gruppe

$$y_1, \quad \omega(x, y_1, y_1', \ldots), \quad \omega^2(x, y_1, y_1', \ldots), \quad \ldots$$

so beschaffen sein müssen, dass höchstens die ersten m Elemente linear von einander unabhängig sind, und es lautet daher die erste Gruppe

$$(\alpha.)\quad y_1, \quad \omega(x, y_1, y_1', \ldots), \quad \omega^2(x, y_1, y_1', \ldots), \quad \ldots \quad \omega^{\lambda-1}(x, y_1, y_1', \ldots),$$
$$\text{worin } \lambda \leqq m,$$

wenn

$$(7.)\quad \omega^\lambda(x, y_1, y_1', \ldots) = c_0 y_1 + c_1 \omega(x, y_1, y_1', \ldots) + \cdots + c_{\lambda-1}\omega^{\lambda-1}(x, y_1, y_1', \ldots)$$

ist, und man sieht zugleich aus (7.), weil diese Gleichung mit der als irreductibel vorausgesetzten linearen homogenen Differentialgleichung die Lösung y_1, also auch alle Lösungen gemein haben muss, dass, wenn $\omega(x, y_1, y_1', \ldots)$

statt y_1 gesetzt wird,

$$\omega^{\lambda+1}(x, y_1, y_1', \ldots)$$
$$= c_0\omega(x, y_1, y_1', \ldots)+c_1\omega^2(x, y_1, y_1', \ldots)+\cdots+c_{\lambda-1}\omega^{\lambda}(x, y_1, y_1', \ldots),$$

oder

$$\omega^{\lambda+1}(x, y_1, y_1', \ldots) = C_0y_1+C_1\omega(x, y_1, y_1', \ldots)+\cdots+C_{\lambda-1}\omega^{\lambda-1}(x, y_1, y_1', \ldots)$$

sein wird, und ebenso für alle folgenden Elemente der Gruppe, so dass die einzigen linear von einander unabhängigen Integrale der Gruppe ($\alpha.$) die ersten λ Elemente derselben sind — doch wird die gesammte erste Gruppe nicht alle Integrale zu enthalten brauchen, welche linear von den ersten λ Elementen abhängen. Sei nun y_2 irgend ein anderes Integral der linearen Differentialgleichung, welches nicht eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten aus den Elementen der Gruppe ($\alpha.$) ist, so werden nach dem Früheren auch

($\beta.$) $\quad y_2, \quad \omega(x, y_2, y_2', \ldots), \quad \omega^2(x, y_2, y_2', \ldots), \quad \ldots \quad \omega^{\lambda-1}(x, y_2, y_2', \ldots)$

Integrale der Differentialgleichung sein, und zwar werden diese Elemente unter einander nicht in homogener linearer Beziehung stehen können, weil eine Relation

$$\varkappa_0y_2+\varkappa_1\omega(x, y_2, y_2', \ldots)+\cdots+\varkappa_{\lambda-1}\omega^{\lambda-1}(x, y_2, y_2', \ldots) = 0$$

vermöge der Irreductibilität der Differentialgleichung

$$\varkappa_0y_1+\varkappa_1\omega(x, y_1, y_1', \ldots)+\cdots+\varkappa_{\lambda-1}\omega^{\lambda-1}(x, y_1, y_1', \ldots) = 0$$

nach sich ziehen würde, und eine solche Beziehung nicht stattfand; andererseits ist aber ebenso klar, dass die weiteren Elemente der Gruppe ($\beta.$) sämmtlich nach dem Obigen lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten von den ersten λ Elementen der Gruppe sein werden, es bleibt aber der Fall nicht ausgeschlossen, dass Elemente der Gruppe ($\beta.$) mit denen der Gruppe ($\alpha.$) in linearer homogener Beziehung stehen, also nicht alle 2λ Elemente der beiden Gruppen Fundamentalintegrale der gegebenen Differentialgleichung sein müssen. Nehmen wir nun ein Integral y_3, welches nicht eine lineare homogene Function von Elementen der Gruppen ($\alpha.$) und ($\beta.$) sein soll, so wird die Gruppe

$$y_3, \quad \omega(x, y_3, y_3', \ldots), \quad \ldots \quad \omega^{\lambda-1}(x, y_3, y_3', \ldots)$$

die Eigenschaften der Gruppe ($\beta.$) haben, u. s. w. Da aber die Anzahl der linear von einander unabhängigen Integrale gleich m ist, so wird *für eine lineare homogene irreductible Differentialgleichung mter Ordnung die Anzahl der*

Gruppen eine endliche, und wenn dieselben in der Form

$$\begin{aligned}
&y_1, \quad \omega(x, y_1, y_1', \ldots), \quad \ldots \quad \omega^{\lambda-1}(x, y_1, y_1', \ldots),\\
&y_2, \quad \omega(x, y_2, y_2', \ldots), \quad \ldots \quad \omega^{\lambda-1}(x, y_2, y_2', \ldots),\\
&\cdots\cdots\cdots

wurzel ist, und somit auf die Unmöglichkeit der Relation (10.), da y_2 eine algebraische Function von x und y_1 sein soll, oder auf die algebraische Beziehung $y_2 = fy_1^{-1}$, während für eine lineare homogene Differentialgleichung die Beziehung (10.) vermöge der oben dargestellten Iterirung die Relation

$$f^{\mu^{\lambda-1}+\mu^{\lambda-2}+\cdots+\mu+1} y_1^{\mu^\lambda} = c_0 y_1 + c_1 f y_1^{\mu} + c_2 f^{\mu+1} y_1^{\mu^2} + \cdots + c_{\lambda-1} f^{\mu^{\lambda-2}+\mu^{\lambda-3}+\cdots+\mu+1} y_1^{\mu^{\lambda-1}}$$

nach sich zieht, aus der sich gegen die Annahme ergiebt, dass μ jedenfalls irrational sein müsste, weil y_1 sonst eine algebraische Function von x wäre, was vermöge der Irreductibilität der Differentialgleichung ausgeschlossen ist *).

Es soll endlich noch eine lineare Beziehung untersucht werden, welche ein Integral und dessen Ableitungen mit einem anderen Integrale verbindet, und zwar soll für die irreductible lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(11.) \qquad y''' = p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y$$

die Möglichkeit der Existenz der Beziehung

$$(12.) \qquad y_2 = fy_1 + gy_1'$$

geprüft werden.

Da die Anzahl der Elemente einer Gruppe mindestens 2 beträgt, so werden für die Differentialgleichung (11.) nur eine oder zwei Gruppen existiren können; im zweiten Falle werden dieselben lauten

$$y_1, \quad fy_1 + gy_1',$$
$$y_2, \quad fy_2 + gy_2',$$

und da das dritte Element der ersten Gruppe eine lineare Function mit constanten Coefficienten von den beiden ersten Elementen dieser Gruppe sein muss, so folgt

$$f[fy_1 + gy_1'] + g[f'y_1 + (f+g')y_1' + gy_1''] = c_0 y_1 + c_1(fy_1 + gy_1'),$$

woraus vermöge der Irreductibilität der gegebenen Gleichung

$$f^2 + gf' = c_0 + c_1 f, \quad fg + g(f+g') = c_1 g, \quad g^2 = 0,$$

also $g = 0$, $f =$ const. folgt, also unmöglich. Besteht jedoch die erste Gruppe aus drei Elementen

$$y_1, \quad fy_1 + gy_1', \quad f(fy_1 + gy_1') + g(f'y_1 + (f+g')y_1' + gy_1''),$$

so wird das nächste Element eine lineare Function der drei ersten sein müssen, und man erhält somit

---

*) Vergl. die allgemeineren Sätze in meiner inzwischen erschienenen Arbeit in den Mathematischen Annalen Bd. 31, Heft 2.

$$f[(f^2+gf')y_1+(2fg+gg')y_1'+g^2y_1'']+g[(g^2p_3+2ff'+gf''+g'f')y_1$$
$$+(f^2+3gf'+g^2p_2+2fg'+gg''+g'^2)y_1'+(2fg+3gg'+g^2p_1)y_1'']$$
$$= c_1y_1+c_2(fy_1+gy_1')+c_3[(f^2+gf')y_1+(2fg+gg')y_1'+g^2y_1''],$$

oder da diese Gleichung wieder eine identische sein muss,

$$(13.)\quad \begin{cases} 3f+3g'+gp_1 = c_3, \\ 3f^2+3fg'+3gf'+g^2p_2+gg''+g'^2 = c_2+c_3(2f+g'), \\ f^3+3fgf'+g^3p_3+g^2f''+gg'f' = c_1+c_2f+c_3(f^2+gf'), \end{cases}$$

Bedingungen, die man auch erhalten würde, wenn man den Ausdruck $y_2 = fy_1+gy_1'$ in die Differentialgleichung (11.) einsetzt und die Eigenschaft ihrer Irreductibilität benutzt, so dass also, wenn p_1, p_2, p_3 für beliebig angenommene constante Werthe von c_1, c_2, c_3 und beliebig festgesetzte algebraische Functionen f und g aus den Gleichungen (13.) bestimmt werden, die mit diesen Coefficienten gebildete lineare homogene Differentialgleichung (11.) zwischen zweien ihrer particulären Integrale die verlangte Beziehung (12.) erfüllt. Betrachten wir zunächst den speciellen Fall, in welchem $f = 0$, also die Beziehung (12.) in

$$(14.)\quad y_2 = gy_1'$$

übergeht, so wird, wenn wir die Differentialgleichung dritter Ordnung in ihrer Normalform, auf die wir noch später zurückkommen,

$$(15.)\quad y''' = p_2y'+p_3y$$

gegeben denken, aus (13.) $g = \frac{c_3}{3}x+\varkappa$ folgen, und sich aus den beiden anderen Gleichungen

$$p_2 = \frac{c_2+\frac{2c_3^2}{9}}{\left(\frac{c_3}{3}x+\varkappa\right)^2}, \quad p_3 = \frac{c_1}{\left(\frac{c_3}{3}x+\varkappa\right)^3}$$

ergeben, und somit die Differentialgleichung (15.) die Form annehmen

$$(16.)\quad y''' = \frac{c_2+\frac{2c_3^2}{9}}{\left(\frac{c_3}{3}x+\varkappa\right)^2}y'+\frac{c_1}{\left(\frac{c_3}{3}x+\varkappa\right)^3}y,$$

für welche in der That

$$(17.)\quad y_2 = \left(\frac{c_3}{3}x+\varkappa\right)y_1'$$

ist; man sieht aber zugleich, dass in diesem Falle die Differentialgleichung (16.) nie eine irreductible sein kann, da dieselbe durch die Substitution

$$\frac{c_3}{3}x+\varkappa = e^t$$

in die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit constanten Coefficienten

$$\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{9c_2}{c_3^2}\frac{dy}{dt}-\frac{27c_1}{c_3^3}y=0$$

übergeht, von der drei Fundamentalintegrale

$$Y_1=e^{m_1t},\quad Y_2=e^{m_2t},\quad Y_3=e^{m_3t}$$

sind, wenn m_1, m_2, m_3 die drei Lösungen der kubischen Gleichung

$$z^3-3z^2-\frac{9c_2}{c_3^2}z-\frac{27c_1}{c_3^3}=0$$

bedeuten; daraus folgt aber für die Differentialgleichung (16.), dass sich ein System von drei particulären Integralen in der Form ergiebt:

$$Y_1=\left(\frac{c_3}{3}x+\varkappa\right)^{m_1},\quad Y_2=\left(\frac{c_3}{3}x+\varkappa\right)^{m_2},\quad Y_3=\left(\frac{c_3}{3}x+\varkappa\right)^{m_3},$$

und man sieht, dass für jedes Integral

$$y=\varkappa_1Y_1+\varkappa_2Y_2+\varkappa_3Y_3$$

die Gleichung (17.) erfüllt ist; zugleich aber folgt, dass die Differentialgleichung (16.) gar keine irreductible Gleichung ist, indem das particuläre Integral $Y_1=\left(\frac{c_3}{3}x+\varkappa\right)^{m_1}$ schon der linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügt

$$\frac{dY}{dx}=\frac{m_1c_3}{3}\frac{Y}{\frac{c_3}{3}x+\varkappa},$$

so dass mithin keine reducirte irreductible lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung existirt, für welche zwischen zwei particulären Integralen eine Beziehung von der Form (14.) stattfindet. Behalten wir aber die allgemeinere Beziehung (12.) für die Differentialgleichung (11.) bei, wofür sich als nothwendige und hinreichende Bedingungen die Gleichungen (13.) zur Bestimmung von p_1, p_2, p_3 ergeben hatten, so folgt unmittelbar unter der Annahme, dass f und g ganze (oder auch rationale gebrochene) Functionen von x sind, von welchen der Grad der ersteren kleiner ist als der der letzteren, dass, wenn der Grad von g der ϱte ist, p_1 eine rationale Function von x sein wird, deren Zähler höchstens vom Grade $\varrho-1$, und deren Nenner vom Grade ϱ ist, p_2 eine rationale Function, deren Zähler höchstens vom $(2\varrho-2)$ten, deren Nenner vom 2ϱten Grade, und p_3 endlich eine ebensolche Function ist, deren Zähler höchstens vom $(3\varrho-3)$ten, deren Nenner vom 3ϱten Grade ist; wir finden somit, ***dass die nothwendige Bedingung dafür, dass eine irre-***

ductible lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen zweien ihrer Integrale y_1 und y_2 eine Beziehung von der Form $y_2 = fy_1 + gy_1'$ besitzt, in welcher f und g ganze Functionen der unabhängigen Variabeln sind, von denen der Grad von f kleiner als der von g, die ist, dass dieselbe zu der Fuchsschen Klasse von Differentialgleichungen gehört, worin die Form der Coefficienten durch die Gleichungen (13.) ***charakterisirt ist*** *).

Ich gehe nun hier nicht weiter auf die Untersuchung der Frage ein, in welchem Zusammenhange die Existenz von Gruppen mit einer endlichen Anzahl von Integralelementen von linearen homogenen Differentialgleichungen mit der festen Fundamentalform der *Fuchs*schen Klasse steht **), der Zweck des Vorausgeschickten war nur, zu zeigen, welche Methoden man zur Untersuchung der Möglichkeit der Existenz von algebraischen Beziehungen zwischen particulären Integralen und deren Ableitungen für eine vorgelegte Differentialgleichung anwenden kann; ich gehe nun aber zur Behandlung der allgemeinen Frage, welche den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet, über, die möglichen allgemeinen Relationen zu untersuchen, welche zwischen den particulären Integralen und deren Ableitungen zunächst für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung stattfinden.

Sei die gegebene Differentialgleichung

$$(18.) \qquad z''' = P_1 z'' + P_2 z' + P_3 z,$$

in welcher p_1, p_2, p_3 algebraische Functionen von x bedeuten, so kann diese durch die Substitution

$$(19.) \qquad z = c^{\frac{1}{3}\int P_1 dx} . y$$

in die Normalform der linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$(20.) \qquad y''' = p_2 y' + p_3 y$$

umgesetzt werden, worin p_2, p_3 wiederum algebraische Functionen von x sind, welche durch die Gleichungen

$$(21.) \qquad p_2 = -P_1' + \tfrac{1}{3}P_1^2 + P_2, \quad p_3 = -\tfrac{1}{3}P_1'' + \tfrac{2}{27}P_1^3 + \tfrac{1}{3}P_1 P_2 + P_3$$

---

*) In meiner oben angeführten Arbeit in den Mathematischen Annalen ist gezeigt, dass eine solche Differentialgleichung dann garnicht irreductibel sein kann, und dass irreductible lineare Differentialgleichungen dritter Ordnung überhaupt nie gestatten, ein Integral als algebraische Function eines anderen, dessen Ableitung und der unabhängigen Variabeln darzustellen.

**) eine Untersuchung, die der *Abel*s von der algebraischen Auflösbarkeit irreductibler algebraischer Gleichungen analog ist, deren Lösungen rationale iterirte Functionen einer derselben sind.

bestimmt sind*), und für lineare Differentialgleichungen dritter Ordnung in dieser Normalform behandeln wir zunächst die aufgeworfene Frage.

Bestehe für die Differentialgleichung (20.) zwischen drei Fundamentalintegralen y_1, y_2, y_3 und deren ersten und zweiten Ableitungen — höhere Ableitungen lassen sich durch die Differentialgleichung (20.) auf algebraischem Wege herausschaffen — die von der stets stattfindenden Relation

$$(22.) \qquad D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = a,$$

in welcher a eine bestimmte Constante bedeutet, verschiedene algebraische Beziehung

$$(23.) \qquad F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'') = 0,$$

welche also $D-a$ nicht als Factor enthält, so wird die Differentiation von (23.) nach x, wenn man sich y_1''', y_2''', y_3''' wiederum vermöge (20.) algebraisch weggeschafft denkt, eine der Relation (23.) ähnliche zwischen denselben Grössen

$$(24.) \qquad F_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'') = 0$$

liefern, deren Unabhängigkeit von (22.) und (23.) zunächst zu untersuchen ist**); es soll gezeigt werden, dass die Existenz der beiden Relationen (22.)

---

*) Mit Rücksicht auf das Folgende mag schon an dieser Stelle bemerkt werden, dass die lineare Differentialgleichung

$$z^{(m)} + P_1 z^{(m-1)} + P_2 z^{(m-2)} + \cdots + P_m z = 0$$

durch die Substitution

$$z = z_1 \int y z_1^{-\frac{m}{m-1}} e^{-\frac{1}{m-1}\int P_1 dx} dx,$$

in welcher z_1 irgend ein particuläres Integral der Differentialgleichung bedeutet, in die Normalform der linearen Differentialgleichung $(m-1)$ter Ordnung

$$y^{(m-1)} + p_3 y^{(m-3)} + p_4 y^{(m-4)} + \cdots + p_m y = 0$$

übergeführt wird, in welcher p_3, p_4, $\ldots$ p_m ganze Functionen von z_1^{-1}, z_1', z_1'', $\ldots$ $z_1^{(m-1)}$ bedeuten.

**) Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die Frage nach der Unabhängigkeit der differentiirten Relationen eine wesentliche ist, indem z. B. die Differentiation der Beziehung (22.) die Identität

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ p_2 y_1' + p_3 y_1 & p_2 y_2' + p_3 y_2 & p_2 y_3' + p_3 y_3 \end{vmatrix} = 0$$

liefert, während z. B. die für die Differentialgleichung

und (23.) nothwendig noch eine von diesen beiden verschiedene Beziehung zwischen denselben Grössen hervorruft, welche entweder durch (24.) dargestellt ist oder in ganz bestimmter Weise aus (23.) hervorgeht. Wir unterscheiden bei der Untersuchung die drei Fälle, in denen (24.) identisch ist, oder F als Factor hat, oder endlich $D-a$ identisch enthält, und somit keine von (22.) und (23.) verschiedene algebraische Beziehung zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen liefern würde.

Wäre nun

I. die Gleichung (24.) eine identische, so dürfte man statt y_1, y_2, y_3 ein beliebiges System von drei Integralen setzen, und es müsste somit, da (24.) durch Differentiation aus (23.) mit Benutzung der Differentialgleichung (20.) selbst hergeleitet war, auch für diese drei willkürlichen Integrale die linke Seite der Gleichung (23.) eine Constante werden, also eine Gleichung von der Form bestehen

$$(25.)\quad \begin{cases} F\{x, \mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2+\mu_{13}y_3, \mu_{11}y_1'+\mu_{12}y_2'+\mu_{13}y_3', \mu_{11}y_1''+\mu_{12}y_2''+\mu_{13}y_3'', \\ \qquad \mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2+\mu_{23}y_3, \ldots \mu_{31}y_1+\mu_{32}y_2+\mu_{33}y_3, \ldots\} - \varkappa = 0, \end{cases}$$

worin F die ganze Function der Gleichung (23.), $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}$ willkürliche Constanten und $\varkappa$ eine von diesen Grössen abhängige Constante bedeutet, und wir hätten sodann in den Gleichungen (23.), (24.), (25.) drei algebraische Beziehungen in den drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen, deren Existenz wir ja grade nachweisen wollen. Nur dann würde der Schluss in diesem Falle ungültig sein, wenn die Gleichung (25.) entweder identisch wäre, was nicht möglich ist, da dann auch die dem speciellen Werthesysteme der μ-Grössen entsprechende Gleichung (23.) es sein müsste, oder wenn (25.) den Factor $D-a$ enthielte, was ebenfalls nicht angeht, da dieser von den μ-Grössen unabhängig ist, derselbe also auch, was nicht der Fall sein sollte, in (23.) enthalten sein müsste, oder endlich wenn (25.) die Function F der Gleichung (23.) als Factor enthielte und somit wieder nicht drei selbständige Gleichungen entstünden*); dass aber auch diese letztere Annahme nicht statthaben kann, ist

---

geltende Relation

$$y''+p_1y'+p_2y = 0$$

$$y_1y_2'-y_2y_1' = ce^{-\int p_1 dx}$$

durch Differentiation in sich selbst übergeht.

*) und ähnliche Schlüsse gelten für die Annahme, dass sich die linke Seite von (25.) in zwei Theile zerlegen lässt, welche resp. die Factoren F und $D-a$ enthalten.

leicht zu sehen *), wenn vorausgesetzt wird, wie es geschehen, dass das F

*) Denn angenommen. es wäre

(1.) $$F\{x, \mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2+\mu_{13}y_3, \ldots\}-\varkappa = K.F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'')$$

identisch für alle μ und y, y', y'', so folgte, wenn

$$y_1 = y_1' = y_1'' = y_2 = y_2' = y_2'' = y_3 = y_3' = y_3'' = 0, \quad F(x, 0, 0, \ldots 0) = L$$

gesetzt wird,

$$L-\varkappa = K.L, \quad \text{oder} \quad \varkappa = L-K.L,$$

da der Identität von (1.) wegen die Grösse K die y, y', y'' nicht enthalten darf, und daraus, wenn

$$F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'')-L = f(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'')$$

gesetzt wird, die für alle Werthe der μ, y, y', y'' gültige Functionalgleichung

(2.) $$f(x, \mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2+\mu_{13}y_3, \ldots) = K.f(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, \ldots),$$

in welcher x als Parameter auftritt. Setzt man in (2.):

$$y_1 = 1,\ y_1' = 0,\ y_1'' = 0,\ y_2 = 0,\ y_2' = 1,\ y_2'' = 0,\ y_3 = 0,\ y_3' = 0,\ y_3'' = 1,$$

so ergiebt sich, wenn wir der Kürze halber den Parameter x aus der Bezeichnung herauslassen,

(3.) $$f(\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}) = K.\frac{1}{A},$$

worin A nur von dem Parameter x abhängt, und somit aus (2.)

(4.) $$\left\{\begin{array}{l} f(\mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2+\mu_{13}y_3, \mu_{11}y_1'+\mu_{12}y_2'+\mu_{13}y_3', \\ \quad \mu_{11}y_1''+\mu_{12}y_2''+\mu_{13}y_3'', \mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2+\mu_{23}y_3, \ldots) \\ = A.f(y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'')f(\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}). \end{array}\right.$$

Setzt man hierin $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{21} = \mu_{23} = \mu_{31} = \mu_{32} = 0$, $\mu_{22} = \mu_{33} = 1$, so folgt

$$f(\mu_{11}y_1, \mu_{11}y_1', \mu_{11}y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'')$$
$$= A.f(\mu_{11}, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)f(y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3''),$$

und somit die Function f sowohl in Bezug auf ihre drei ersten, sowie auf ihre drei zweiten und auf ihre drei dritten Argumente homogen und kann somit in die Form gesetzt werden

$$f(y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'') = a y_1^k y_2^l y_3^m \varphi\left(\frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}, \frac{y_2'}{y_2}, \frac{y_2''}{y_2}, \frac{y_3'}{y_3}, \frac{y_3''}{y_3}\right).$$

Danach geht die Beziehung (4.) in

(5.) $$\left\{\begin{array}{l} (\mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2+\mu_{13}y_3)^k(\mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2+\mu_{23}y_3)^l(\mu_{31}y_1+\mu_{32}y_2+\mu_{33}y_3)^m \\ \quad \times\varphi\left\{\begin{array}{ll} \frac{\mu_{11}y_1'+\mu_{12}y_2'+\mu_{13}y_3'}{\mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2+\mu_{13}y_3}, & \frac{\mu_{11}y_1''+\mu_{12}y_2''+\mu_{13}y_3''}{\mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2+\mu_{13}y_3} \\ \frac{\mu_{21}y_1'+\mu_{22}y_2'+\mu_{23}y_3'}{\mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2+\mu_{23}y_3}, & \frac{\mu_{21}y_1''+\mu_{22}y_2''+\mu_{23}y_3''}{\mu_{21}y_1+\mu_{22}y_2+\mu_{23}y_3} \\ \frac{\mu_{31}y_1'+\mu_{32}y_2'+\mu_{33}y_3'}{\mu_{31}y_1+\mu_{32}y_2+\mu_{33}y_3}, & \frac{\mu_{31}y_1''+\mu_{32}y_2''+\mu_{33}y_3''}{\mu_{31}y_1+\mu_{32}y_2+\mu_{33}y_3} \end{array}\right\} \\ = C.(\mu_{11}y_1)^k(\mu_{21}y_2)^l(\mu_{31}y_3)^m\varphi\left(\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}, \frac{\mu_{13}}{\mu_{11}}, \frac{\mu_{22}}{\mu_{21}}, \frac{\mu_{23}}{\mu_{21}}, \frac{\mu_{32}}{\mu_{31}}, \frac{\mu_{33}}{\mu_{31}}\right) \\ \quad \times q\left(\frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}, \frac{y_2'}{y_2}, \frac{y_2''}{y_2}, \frac{y_3'}{y_3}, \frac{y_3''}{y_3}\right) \end{array}\right.$$

der Gleichung (23.) den Factor $D-a$ nicht identisch enthält — es ist somit die Annahme des Falles I. erledigt.

über, worin C eine von den Grössen μ, y, y', y'' unabhängige Zahl darstellt, und die φ-Function eine ganze Function der eingeschlossenen Argumente bedeutet. Setzt man nun, indem man die φ-Function in Bezug auf das letzte Argument irreductibel annehmen darf,

$$(6.)\quad \varphi\Big(\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}, \frac{\mu_{13}}{\mu_{11}}, \frac{\mu_{22}}{\mu_{21}}, \frac{\mu_{23}}{\mu_{21}}, \frac{\mu_{32}}{\mu_{31}}, \frac{\mu_{33}}{\mu_{31}}\Big) = 0,$$

woraus sich

$$(7.)\quad \frac{\mu_{33}}{\mu_{31}} = \psi\Big(\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}, \frac{\mu_{13}}{\mu_{11}}, \frac{\mu_{22}}{\mu_{21}}, \frac{\mu_{23}}{\mu_{21}}, \frac{\mu_{32}}{\mu_{31}}\Big) = \psi(\mu)$$

ergeben mag, so muss vermöge (5.), da die rechte also die linke Seite für diese Beziehung der μ-Werthe für beliebige Werthe der y, y', y'' verschwindet,

$$(8.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{y_1''+\frac{\mu_{32}}{\mu_{31}}y_2''+\psi(\mu)y_3''}{y_1+\frac{\mu_{32}}{\mu_{31}}y_2+\psi(\mu)y_3} = \psi\left\{\dfrac{y_1'+\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}y_2'+\frac{\mu_{13}}{\mu_{11}}y_3'}{y_1+\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}y_2+\frac{\mu_{13}}{\mu_{11}}y_3}, \dfrac{y_1''+\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}y_2''+\frac{\mu_{13}}{\mu_{11}}y_3''}{y_1+\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}y_2+\frac{\mu_{13}}{\mu_{11}}y_3}, \right. \\ \qquad \left. \dfrac{y_1'+\frac{\mu_{22}}{\mu_{21}}y_2'+\frac{\mu_{23}}{\mu_{21}}y_3'}{y_1+\frac{\mu_{22}}{\mu_{21}}y_2+\frac{\mu_{23}}{\mu_{21}}y_3}, \dfrac{y_1''+\frac{\mu_{22}}{\mu_{21}}y_2''+\frac{\mu_{23}}{\mu_{21}}y_3''}{y_1+\frac{\mu_{22}}{\mu_{21}}y_2+\frac{\mu_{23}}{\mu_{21}}y_3}, \dfrac{y_1'+\frac{\mu_{32}}{\mu_{31}}y_2'+\frac{\mu_{33}}{\mu_{31}}y_3'}{y_1+\frac{\mu_{32}}{\mu_{31}}y_2+\frac{\mu_{33}}{\mu_{31}}y_3}\right\} \end{array}\right.,$$

sein für willkürliche Werthe der μ und y, y', y''. Durch Substitution von $y_3=y_3'=y_3''=0$ folgt aus (8.), wenn

$$\frac{y_1'+\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}y_2'}{y_1+\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}y_2} = Y_1,\quad \frac{y_1''+\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}y_2''}{y_1+\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}}y_2} = Y_2,\quad \frac{y_1'+\frac{\mu_{22}}{\mu_{21}}y_2'}{y_1+\frac{\mu_{22}}{\mu_{21}}y_2} = Y_3,$$

$$\frac{y_1''+\frac{\mu_{22}}{\mu_{21}}y_2''}{y_1+\frac{\mu_{22}}{\mu_{21}}y_2} = Y_4,\quad \frac{y_1'+\frac{\mu_{32}}{\mu_{31}}y_2'}{y_1+\frac{\mu_{32}}{\mu_{31}}y_2} = Y_5,$$

also

$$\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}} = \frac{Y_1y_1-y_1'}{y_2'-y_2Y_1},\quad \frac{\mu_{22}}{\mu_{21}} = \frac{Y_3y_1-y_1'}{y_2'-y_2Y_3},\quad \frac{\mu_{32}}{\mu_{31}} = \frac{Y_5y_1-y_1'}{y_2'-y_2Y_5},$$

$$\frac{y_1''y_2'-y_1'y_2''}{y_1y_2'-y_2y_1'} = \frac{Y_2Y_3-Y_1Y_4}{Y_3-Y_1},\quad \frac{y_1y_2''-y_2y_1''}{y_1y_2'-y_2y_1'} = \frac{Y_4-Y_2}{Y_3-Y_1}$$

gesetzt wird,

$$(9.)\quad \frac{Y_2Y_3-Y_1Y_4+(Y_4-Y_2)Y_5}{Y_3-Y_1} = \psi(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5),$$

wodurch wegen der Willkürlichkeit der Argumente Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 die Form der ψ-Function festgestellt ist; und somit die Auflösung der Gleichung

$$(10.)\quad \varphi(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6) = 0$$

Würde

II. die Gleichung (24.) F als Factor enthalten, so müsste, weil F_1 das nach x genommene Differential von F ist, die identische Zerlegung

---

vermöge (7.) und (9.)

$$Y_6 = \frac{Y_2 Y_3 - Y_1 Y_4 + (Y_4 - Y_2) Y_5}{Y_3 - Y_1}$$

oder

$$(10.) \quad \varphi(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6) = M \begin{vmatrix} 1 & Y_1 & Y_2 \\ 1 & Y_3 & Y_4 \\ 1 & Y_5 & Y_6 \end{vmatrix}$$

liefert, worin M eine algebraische Function von x bedeutet. Daraus folgt aber

$$(11.) \quad \varphi\left(\frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}, \frac{y_2'}{y_2}, \frac{y_2''}{y_2}, \frac{y_3'}{y_3}, \frac{y_3''}{y_3}\right) = \frac{M}{y_1 y_2 y_3} \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \\ y_3 & y_3' & y_3'' \end{vmatrix},$$

und setzt man diesen Ausdruck in die Functionalgleichung (5.) ein, so erhält man

$$(\mu_{11} y_1 + \mu_{12} y_2 + \mu_{13} y_3)^{k-1} (\mu_{21} y_1 + \mu_{22} y_2 + \mu_{23} y_3)^{l-1} (\mu_{31} y_1 + \mu_{32} y_2 + \mu_{33} y_3)^{m-1}$$
$$= C(\mu_{11} y_1)^{k-1} (\mu_{21} y_2)^{l-1} (\mu_{31} y_3)^{m-1} . M,$$

und hieraus folgt $k = 1$, $l = 1$, $m = 1$, so dass

$$(12.) \quad f(y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'') = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \\ y_3 & y_3' & y_3'' \end{vmatrix}$$

wird, worin A zunächst noch eine beliebige algebraische Function von x sein darf, damit die Form (12.) der Functionalgleichung (4.) Genüge leistet, und K nach (2.) durch den Ausdruck bestimmt ist,

$$K = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix},$$

und daher

$$(13.) \quad F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'') = L + \frac{1}{A} \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \\ y_3 & y_3' & y_3'' \end{vmatrix}.$$

Da endlich hierdurch die Functionalgleichung (1.) erfüllt sein soll, so muss

$$(14.) \quad k = L - L \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix}$$

sein, und es wird in der That die Functionalgleichung (1.) erfüllt, was auch A und L für algebraische Functionen von x sein mögen, wenn nur k durch (14.) bestimmt ist.

Die obige Beziehung (23.) zwischen den drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen würde somit nach (22.) in $L + \frac{a}{A} = 0$ übergehen, was nicht möglich ist. es müsste also (13.) selbst in (22.) übergehen, was ebenfalls ausgeschlossen wurde.

bestehen

$$(26.)\quad \frac{dF(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'')}{dx} = F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'').P,$$

worin auf der linken Seite die Grössen y_1''', y_2''', y_3''' vermöge der Differentialgleichung (20.) in linearer homogener Weise herauszuschaffen sind, und P, wie sofort aus der identischen Gleichheit der beiden Seiten von (26.) ersichtlich, eine ganze Function von x darstellt, die von y, y', y'' frei ist. Da nun (26.) identisch ist, so wird sie auch bestehen bleiben, wenn man für y_1, y_2, y_3 beliebige andere Integrale einsetzt, und daher wird die Relation stattfinden

$$(27.)\quad \begin{cases} \dfrac{dF(x, \mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2+\mu_{13}y_3, \mu_{11}y_1'+\mu_{12}y_2'+\mu_{13}y_3', \ldots)}{dx} \\ \qquad = F(x, \mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2+\mu_{13}y_3, \ldots)P, \end{cases}$$

welche, mit (26.) zusammengestellt,

$$(28.)\quad \begin{cases} F(x, \mu_{11}y_1+\mu_{12}y_2+\mu_{13}y_3, \mu_{11}y_1'+\mu_{12}y_2'+\mu_{13}y_3', \mu_{11}y_1''+\mu_{12}y_2''+\mu_{13}y_3'', \ldots) \\ \qquad = C.F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'') \end{cases}$$

liefert, deren Unmöglichkeit unter den gemachten Annahmen eben erwiesen worden.

Wäre endlich

III. $D-a$ in der linken Seite von (24.) enthalten, so dass identisch

$$(29.)\quad \begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'') \\ = (D-a)f(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'') \end{cases}$$

ist, so wird man für y_3, y_3', y_3'' auch

$$y_3+m_1y_1+m_2y_2, \quad y_3'+m_1y_1'+m_2y_2', \quad y_3''+m_1y_1''+m_2y_2''$$

setzen können und erhält, da D nach (22.) durch diese Substitution unverändert bleibt,

$$(30.)\quad \begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3+m_1y_1+m_2y_2, \ldots) \\ = (D-a)f(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3+m_1y_1+m_2y_2, \ldots), \end{cases}$$

so dass also auch für das Fundamentalsystem y_1, y_2, y_3 die Relation besteht

$$(31.)\quad \begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', \\ \qquad y_3+m_1y_1+m_2y_2, y_3'+m_1y_1'+m_2y_2', y_3''+m_1y_1''+m_2y_2'') = 0 \end{cases}$$

für willkürliche Werthe von m_1 und m_2, und somit wieder

$$(32.)\quad \begin{cases} F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', \\ \qquad y_3+m_1y_1+m_2y_2, y_3'+m_1y_1'+m_2y_2', y_3''+m_1y_1''+m_2y_2'')-z = 0, \end{cases}$$

worin $\varkappa$ eine von m_1 und m_2 abhängige Constante bedeutet. Ist nun diese Gleichung mit (22.) und (23.) zusammengehalten eine selbständige, so hätten wir wiederum, wie es verlangt wurde, drei von einander unabhängige algebraische Beziehungen zwischen den drei Fundamentalintegralen y_1, y_2, y_3 und deren Ableitungen; im entgegengesetzten Falle kann zunächst die linke Seite von (32.) $D-a$ nicht identisch enthalten, da m_1 und m_2 beliebig sind, also auch Null sein könnten, die linke Seite von (23.) jedoch $D-a$ als Factor nicht enthält; es kann auch die Gleichung (32.) nicht eine identische sein, weil dann auch (23.) eine solche sein müsste — es bleibt somit nur noch die Frage zu erörtern, ob die linke Seite von (23.) in der linken Seite von (32.) als Factor identisch enthalten sein kann, oder ob die Gleichung bestehen kann

$$(33.)\quad \begin{cases} F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', \\ \qquad y_3+m_1y_1+m_2y_2,\ y_3'+m_1y_1'+m_2y_2',\ y_3''+m_1y_1''+m_2y_2'')-\varkappa \\ \quad = F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'').P, \end{cases}$$

worin $\varkappa$ nur von m_1 und m_2, P der Identität wegen nicht von

$$y_1,\ y_1',\ y_1'',\ y_2,\ y_2',\ y_2'',\ y_3,\ y_3',\ y_3''$$

abhängt. Entwickelt man auf beiden Seiten nach steigenden Potenzen von m_1 und m_2 und setzt die Coefficienten der ersten Potenz von m_1 einander gleich, so erhält man, wenn man beachtet, dass $\varkappa_{m_1=m_2=0}=0$, $P_{m_1=m_2=0}=1$ ist,

$$(34.)\quad \frac{\partial F}{\partial y_3}\cdot y_1+\frac{\partial F}{\partial y_3'}\cdot y_1'+\frac{\partial F}{\partial y_3''}\cdot y_1''+A = F.B,$$

worin A und B von den $y,\ y',\ y''$ unabhängig sind — aber diese Gleichung kann, da sie eine identische sein soll, nicht bestehen; denn sei λ die höchste Potenz, zu der y_3 in F erhoben ist; ferner die höchste Potenz von y_3', die mit y_3^λ multiplicirt in F vorkommt, die μte; endlich die höchste Potenz von y_3'', die mit $y_3^\lambda y_3'^\mu$ multiplicirt in F enthalten ist, die νte, so wird das Glied $Ey_3^\lambda y_3'^\mu y_3''^\nu$, worin E von $y_3,\ y_3',\ y_3''$ unabhängig ist, in F enthalten sein, also auf der rechten Seite der Gleichung (34.) vorkommen, während die Gestalt der linken Seite dieser Gleichung zeigt, dass die gleichzeitige Verbindung der λ, μ, νten Potenz der Variabeln $y_3,\ y_3',\ y_3''$ in dieser nicht mehr enthalten ist.

Nachdem somit die drei Fälle I., II., III., und zwar wiederum mit Ergänzung ähnlicher Schlüsse für die in der obigen Anmerkung bezeichnete Annahme, dahin erledigt sind, dass sie sich entweder als unmöglich herausstellen und danach die drei Gleichungen (22.), (23.), (24.) drei von einander

unabhängige algebraische Beziehungen zwischen drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen liefern, oder dass, wenn dieselben möglich wären, eine andere algebraische Relation zwischen diesen Grössen an die Stelle der Gleichung (24.) träte, können wir den folgenden Satz aussprechen, der der weiteren Untersuchung zu Grunde gelegt wird:

Wenn für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung in der reducirten Form eine algebraische Beziehung zwischen drei Fundamentalintegralen derselben und deren Ableitungen besteht, so existirt ausser derjenigen, welche stets die Determinante des Fundamentalsystems einer Constanten gleich macht, immer noch eine von diesen beiden unabhängige algebraische Relation zwischen eben diesen Grössen.

Bestehen nun für die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(35.) \qquad y''' = p_2 y' + p_3 y$$

die Gleichung (22.) und eine davon unabhängige algebraische Beziehung zwischen drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen, somit nach dem eben bewiesenen Satze drei von einander unabhängige Relationen zwischen diesen Grössen, so können wir diese auf die Form gebracht denken

$$(36.) \qquad \begin{cases} y_3 = F_0(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2''), \\ y_3' = F_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2''), \\ y_3'' = F_2(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2''); \end{cases}$$

setzt man nun

$$(37.) \qquad y = y_1 \int z y_1^{-\frac{3}{2}} dx$$

(in 35.) ein, so erhält man

$$(38.) \qquad z'' = (\tfrac{3}{4} y_1^{-2} y_1'^2 - \tfrac{3}{2} y_1^{-1} y_1'' + p_2) z,$$

für welche Differentialgleichung wir die den beiden Integralen y_2 und y_3 nach (37.) entsprechenden Integrale z_2 und z_3 nennen wollen. Diese beiden Integrale sind nun auch Fundamentalintegrale der Differentialgleichung (38.); denn angenommen, es bestünde zwischen ihnen die homogene Relation

$$a_2 z_2 + a_3 z_3 = 0,$$

so ergäbe sich aus (37.)

$$(39.) \qquad a_2(y_1 y_2' - y_2 y_1') + a_3(y_1 y_3' - y_3 y_1') = 0,$$

woraus einerseits durch Differentiation

$$(40.) \qquad a_2(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + a_3(y_1 y_3'' - y_3 y_1'') = 0,$$

andererseits durch Multiplication von (39.) mit y_1'', von (40.) mit y_1' und

Subtraction

$$(41.) \quad a_2(y_2'y_1''-y_1'y_2'')+a_3(y_3'y_1''-y_1'y_3'') = 0$$

folgt, und setzt man die ersten Theile der drei Gleichungen (39.), (40.), (41.) durch die zweiten ausgedrückt in die durch (22.) gegebene Beziehung

$$y_3(y_1'y_2''-y_2'y_1'')-y_3'(y_1y_2''-y_2y_1'')+y_3''(y_1y_2'-y_2y_1') = a$$

ein, so folgt $\frac{aa_2}{a_3} = 0$, also die Unmöglichkeit der Annahme, wenn a von Null verschieden, d. h. y_1, y_2, y_3 ein Fundamentalsystem von (35.) war. Aus der ersten der drei Gleichungen (36.) ergiebt sich nun nach (37.)

$$\int z_3' y_1^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{y_1} F_0\Big(x, y_1, y_1', y_1'', y_1\int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}}dx, y_1'\int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}}dx + z_2 y_1^{-\frac{1}{2}},$$
$$y_1''\int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}}dx + \tfrac{1}{2} z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} y_1' + z_2' y_1^{-\frac{1}{2}}\Big)$$

und durch Differentiation mit Benutzung von (35.) und (38.)

$$(42.) \quad z_3 = f\Big(x, y_1, y_1', y_1'', z_2, z_2', \int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx\Big),$$

wobei es *wesentlich* *) ist, dass z_3 explicite ohne Ableitung in dieser Gleichung vorkommt; setzt man diese Gleichung in die Form

$$(43.) \quad \int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx = \varphi(x, y_1, y_1', y_1'', z_2, z_2', z_3),$$

worin φ von z_3 nicht unabhängig ist, so folgt wiederum durch Differentiation mit Benutzung von (35.) und (38.)

$$z_2 = \psi(x, y_1, y_1', y_1'', z_2, z_2', z_3, z_3'),$$

worin z_3' der gemachten Annahme gemäss enthalten sein *muss*, oder endlich

$$(44.) \quad \omega(x, y_1, y_1', y_1'', z_2, z_2', z_3, z_3') = 0.$$

Man sieht auch sogleich, dass diese algebraische Beziehung zwischen zwei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen der Differentialgleichung (38.) nicht etwa die stets stattfindende

$$(45.) \quad z_2z_3'-z_3z_2' = c$$

---

*) Nur um die Möglichkeit auszuschliessen, dass durch Einsetzen von

$$y_2 = y_1\int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx \text{ und } y_3 = y_1\int z_3 y_1^{-\frac{3}{2}} dx$$

in die Beziehung (23.) z_2, z_3 und deren Ableitungen herausfallen, worauf die ganze folgende Betrachtung fusst, habe ich den obigen Satz von der Existenz dreier unabhängigen Relationen erwiesen, welcher die Möglichkeit der successiven Einführung von z_2 und z_3 gewährt.

sein kann, worin c eine Constante bedeutet, da die Substitution von

$$z_2 = y_1^{\frac{3}{2}} \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}, \quad z_3 = y_1^{\frac{3}{2}} \frac{d\left(\frac{y_3}{y_1}\right)}{dx}$$

in (45.), wie unmittelbar zu erkennen, diese Beziehung in die von der ersten Relation (36.) verschiedene (22.) überführt *).

*) Wir wollen diese Reduction für den Fall ausführen, dass die gegebene algebraische Beziehung (23.) die Ableitungen der drei Fundamentalintegrale garnicht enthält, dass also eine algebraische Relation

$$(\alpha.) \quad F(x, y_1, y_2, y_3) = 0$$

zwischen den drei Integralen besteht, welche der ersten Gleichung (36.) analog geschrieben

$$(\beta.) \quad y_3 = f(x, y_1, y_2)$$

lauten möge; dann wird

$$\int z_3 y_1^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{y_1} f\left(x, y_1, y_1 \int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx\right) \text{ oder } z_3 = \varphi\left(x, y_1, y_1', z_2, \int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx\right)$$

$$\text{oder } \int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx = \psi(x, y_1, y_1', z_2, z_3),$$

und daraus wiederum durch Differentiation

$$(\gamma.) \quad \omega(x, y_1, y_1', y_1'', z_2, z_2', z_3, z_3') = 0.$$

Für den Fall, dass ($\alpha.$) eine ganze ***homogene*** Function der drei Fundamentalintegrale mit constanten Coefficienten ist, können wir dieselbe in die Form setzen

$$(\delta.) \quad \begin{cases} F_1\left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}\right) = 0 \text{ oder } F_1\left(\int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx, \int z_3 y_1^{-\frac{3}{2}} dx\right) = 0 \\ \text{oder } \int z_3 y_1^{-\frac{3}{2}} dx = \varphi\left(\int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx\right), \end{cases}$$

oder durch Differentiation

$$z_3 y_1^{-\frac{3}{2}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx} \cdot z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} \text{ oder } \frac{z_3}{z_2} = \psi\left(\int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx\right);$$

setzt man statt dessen

$$\int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx = \chi\left(\frac{z_3}{z_2}\right)$$

und differentiirt wiederum, beachtet ferner, dass $z_2 z_3' - z_3 z_2' = a$ ist, worin a eine Constante bedeutet, so erhält man

$$(\varepsilon.) \quad z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} = \chi'\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \frac{a}{z_2^2} \text{ oder } z_3 = z_2 \omega(a^{-1} z_2^3 y_1^{-\frac{3}{2}}),$$

und ***es besteht somit unter der Annahme einer homogenen Relation zwischen den drei Fundamentalintegralen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung eine algebraische Beziehung zwischen den entsprechenden Fundamentalintegralen der reducirten Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Adjungirung eines jener Fundamentalintegrale.***

Die oben weiter geführte Untersuchung wird sehr bald die Bedeutung dieses eben hergeleiteten und so unmittelbar ersichtlichen Satzes, welcher die einfachste Bedingung für die Reductibilität der Differentialgleichung zweiter Ordnung liefert, ergeben.

Wir finden somit den folgenden Satz:

Wenn für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung in der reducirten Form eine algebraische Beziehung zwischen drei Fundamentalintegralen derselben und deren Ableitungen besteht, so existirt auch stets für die mit Hülfe eines dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der reducirten Form eine algebraische Relation zwischen zwei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen mit Adjungirung jenes einen zu Hülfe genommenen Integrales und dessen Ableitungen.

Es bleibt nun die Frage zu erörtern, unter welchen Bedingungen für die Differentialgleichung (38.) eine Beziehung der angegebenen Art stattfinden kann und wann nicht.

Sei y_1 das Integral einer algebraischen Differentialgleichung $m$ter Ordnung

$$(46.) \qquad y^{(m)} = F(x, y, y', y'', \dots y^{(m-1)}),$$

und bestehe zwischen zwei Fundamentalintegralen z_2 und z_3 und deren Ableitungen einer mit Adjungirung von y_1 und dessen Ableitungen *irreductibeln* linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(47.) \qquad z'' = \varphi(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)})z$$

eine algebraische Beziehung

$$(48.) \qquad \omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_2, z_2', z_3, z_3') = 0,$$

so wird man durch Zusammenstellung dieser mit der stets gültigen

$$(49.) \qquad z_2 z_3' - z_3 z_2' = a$$

eine algebraische Beziehung von der Form herstellen können

$$(50.) \qquad z_3 = \Omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_2, z_2').$$

Differentiirt man diese Gleichung, so dass man mit Benutzung von (46.) und (47.)

$$(51.) \quad \begin{cases} z_3' = \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1} y_1' + \cdots \\ \cdots + \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1^{(m-1)}} F(x, y_1, \dots y_1^{(m-1)}) + \dfrac{\partial\Omega}{\partial z_2} z_2 + \dfrac{\partial\Omega}{\partial z_2'} \varphi(x, y_1, \dots y_1^{(m-1)}) z_2 \end{cases}$$

erhält, und setzt die Werthe für z_3 und z_3' in (49.) ein, so ergiebt sich

$$(52.) \quad \begin{cases} z_2 \left\{ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} + \cdots + \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1^{(m-1)}} F(x, y_1, \dots y_1^{(m-1)}) + \dfrac{\partial\Omega}{\partial z_2} z_2' \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{\partial\Omega}{\partial z_2'} \varphi(x, y_1, \dots y_1^{(m-1)}) z_2 \right\} - z_2' \Omega(x, y_1, \dots y_1^{(m-1)}, z_2, z_2') = a, \end{cases}$$

welche Gleichung eine in allen ihr angehörigen Grössen identische sein muss, da die Differentialgleichung (47.) als eine mit Adjungirung von y_1 und dessen Ableitungen irreductible vorausgesetzt war, und (52.) in Bezug auf z_2 eine Differentialgleichung erster Ordnung wäre. Ist aber (52.) identisch, wird ihr also auch genügt, wenn statt z_2 irgend ein anderes Integral ζ_2 der Differentialgleichung (47.) substituirt wird, so wird, da der Ausdruck

$$(53.) \quad \zeta_3 = \Omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, \zeta_2, \zeta_2')$$

differentiirt die rechte Seite von (51.) liefert, wenn in dieser überall z_2 durch ζ_2 ersetzt worden, auch die Gleichung

$$(54.) \quad \zeta_2\zeta_3' - \zeta_3\zeta_2' = a$$

erfüllt sein, da diese nichts anderes als (52.) ist, wenn man ζ_2 statt z_2 substituirt hat, und wir folgern somit, dass, weil $\zeta_2 = \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3$ ist, worin μ_2 und μ_3 willkürliche Constanten bedeuten, der durch die Gleichung

$$(55.) \quad \zeta_3 = \Omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3, \mu_2 z_2' + \mu_3 z_3')$$

für jeden Zweig von Ω bestimmte Ausdruck ein Integral der Differentialgleichung

$$(56.) \quad (\mu_2 z_2 + \mu_3 z_3)\zeta' - (\mu_2 z_2' + \mu_3 z_3')\zeta = a$$

ist. Da aber sämmtliche Integrale dieser Differentialgleichung erster Ordnung in ζ offenbar in der Form enthalten sind

$$(57.) \quad \zeta = m_2 z_2 + m_3 z_3,$$

wenn m_2 und m_3 der Bedingung unterworfen werden

$$(58.) \quad \mu_2 m_3 - \mu_3 m_2 = 1,$$

so folgt aus (55.) die Beziehung

$$(59.) \quad m_2 z_2 + m_3 z_3 = \Omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3, \mu_2 z_2' + \mu_3 z_3'),$$

worin μ_2, μ_3 willkürliche, m_2 und m_3 von diesen abhängige und durch die Gleichung (58.) mit einander verbundene Zahlen bedeuten, oder nach (50.)

$$(60.) \quad \Omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, \mu_2 z_2 + \mu_3 \Omega, \mu_2 z_2' + \mu_3 \Omega') = m_2 z_2 + m_3 \Omega,$$

worin kurz Ω statt der Function auf der rechten Seite der Gleichung (50.) gesetzt ist, und das durch den Ausdruck Ω' eintretende z_2'' vermöge der Gleichung (47.) durch $\varphi(x, y_1, \dots y_1^{(m-1)})z_2$ zu ersetzen ist. Da aber (60.) dann eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung in z_2 würde, (47.) aber mit Adjungirung von x, y_1, y_1', $\dots$ $y_1^{(m-1)}$ irreductibel sein sollte, so wird (60.) für alle in ihr vorkommenden Grössen identisch sein müssen,

und man erhält, wenn $\mu_3 = 0$ gesetzt wird, nach (58.)

$$(61.) \qquad \Omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, \mu_2 z_2, \mu_2 z_2') = m_2 z_2 + \frac{1}{\mu_2}\Omega;$$

differentiirt man diese Gleichung nach z_2 und z_2', so ergiebt sich

$$(62.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega(x, y_1, \dots y_1^{(m-1)}, \mu_2 z_2, \mu_2 z_2')}{\partial \mu_2 z_2}\mu_2 = m_2 + \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial \Omega}{\partial z_2}, \\ \dfrac{\partial \Omega(x, y_1, \dots y_1^{(m-1)}, \mu_2 z_2, \mu_2 z_2')}{\partial \mu_2 z_2'}\mu_2 = \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial \Omega}{\partial z_2'}, \end{cases}$$

und verbindet man diese Gleichungen mit dem Differential von (61.) nach μ_2 genommen

$$\frac{\partial \Omega(x, y_1, \dots y_1^{(m-1)}, \mu_2 z_2, \mu_2 z_2')}{\partial \mu_2 z_2} z_2 + \frac{\partial \Omega(x, y_1, \dots y_1^{(m-1)}, \mu_2 z_2, \mu_2 z_2')}{\partial \mu_2 z_2'} z_2'$$
$$= \frac{dm_2}{d\mu_2} z_2 - \frac{1}{\mu_2^2}\Omega,$$

so erhält man

$$(63.) \qquad m_2 z_2 + \frac{1}{\mu_2} z_2 \frac{\partial \Omega}{\partial z_2} + \frac{1}{\mu_2} z_2' \frac{\partial \Omega}{\partial z_2'} = \mu_2 \frac{dm_2}{d\mu_2} z_2 - \frac{1}{\mu_2}\Omega$$

oder

$$(64.) \qquad z_2 \frac{\partial \Omega}{\partial z_2} + z_2' \frac{\partial \Omega}{\partial z_2'} = \mu_2\left(\mu_2 \frac{dm_2}{d\mu_2} - m_2\right) z_2 - \Omega.$$

Da nun diese Gleichung in z_2 und z_2' identisch sein soll, also als partielle Differentialgleichung in diesen beiden unabhängigen Variabeln aufgefasst werden darf, so ergiebt sich als allgemeines Integral derselben für Ω die Form

$$(65.) \qquad \Omega(x, y_1, \dots y_1^{(m-1)}, z_2, z_2') = \frac{1}{z_2}\chi\left(x, y_1, \dots y_1^{(m-1)}, \frac{z_2'}{z_2}\right) + \frac{\mu_2^2 m_2' - m_2 \mu_2}{2} \cdot z_2$$

oder, wenn die Constante $\dfrac{\mu_2^2 m_2' - m_2 \mu_2}{2} = c$ gesetzt wird, nach (50.)

$$(66.) \qquad z_2' = z_2 \omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_2(z_3 - c z_2)),$$

worin ω der Forderung gemäss eine algebraische Function ist, die zunächst noch willkürlich sein darf.

Setzt man in diese Gleichung z_3 statt z_2, also nach (57.), (58.), (59.) $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 1$, $m_2 = -1$, somit $-z_2 + m_3 z_3$ statt z_3, worin m_3 so bestimmt werden kann, dass für ω jeder Zweig dieser algebraischen Function gewählt werden darf, so geht die Gleichung (66.) in

$$(67.) \qquad z_3' = z_3 \omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_3(-z_2 + (m_3 - c) z_3))$$

über, und es folgt aus (66.) und (67.) mit Hülfe von (49.) die Beziehung

$$(68.)\quad \begin{cases} z_2 z_3 \{\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_3(-z_2+(m_3-c)z_3)) \\ \quad -\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_2(z_3-cz_2))\} = a, \end{cases}$$

welche zufolge der Irreductibilität der Differentialgleichung (47.) eine identische sein muss *). Zunächst werde angenommen, dass c von Null verschieden ist; setzt man sodann $z_3 = cz_2$, so folgt, wenn $cz_2^2 = t$ und zur Abkürzung $m_3 - c = k$ gesetzt wird, für beliebige t

$$(69.)\quad \omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, (kc-1)t) = \frac{a}{t} + \omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, 0),$$

welche Gleichung offenbar unmöglich ist; ist dagegen $c = 0$, so geht die Gleichung (68.) in

$$(70.)\quad \begin{cases} z_2 z_3 \{\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_3(-z_2+m_3 z_3)) \\ \quad -\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_2 z_3)\} = a, \end{cases}$$

und wenn man unter der Voraussetzung, dass m_3 von Null verschieden ist, $z_2 = m_3 z_3$ und $m_3 z_3^2 = t$ setzt, in

$$\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, t) = \omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, 0) - \frac{a}{t}$$

---

*) Denn bestünde eine algebraische Beziehung zwischen zwei Fundamentalintegralen z_2 und z_3 einer irreductibeln Differentialgleichung (47.)

$$(\alpha.)\quad z_3 = f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_2),$$

so folgte

$$z_3' = \frac{df}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z_2} z_2', \quad z_3'' = \frac{d^2 f}{dx^2} + 2\frac{\partial^2 f}{dx\,\partial z_2} z_2' + \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} z_2'^2 + \frac{\partial f}{\partial z_2} z_2'',$$

worin die Differentiation nach x genommen sich auch auf die Grössen $y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}$ bezieht, und es ergiebt sich somit nach (47.):

$$(\beta.)\quad \begin{cases} \frac{d^2 f}{dx^2} + 2\frac{\partial^2 f}{dx\,\partial z_2} z_2' + \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} z_2'^2 + \frac{\partial f}{\partial z_2} \varphi(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}) z_2 \\ \quad = \varphi(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}) f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_2). \end{cases}$$

Da diese Gleichung nun eine in z_2, z_2' identische sein muss in Folge der Annahme der Irreductibilität der Differentialgleichung (47.) (mit Adjungirung der Grössen $x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}$), so folgt

$$(\gamma.)\quad \frac{\partial^2 f}{dx\,\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} = 0,$$

und somit

$$(\delta.)\quad z_3 = f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_2) = Pz_2 + Q,$$

worin P eine Constante, Q eine algebraische Function von $x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}$ darstellt — aber dies ist unmöglich, da dann Q ein in $x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}$ algebraisches Integral der mit Adjungirung von $x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}$ irreductibeln Differentialgleichung (47.) wäre, und Q nicht verschwinden kann, weil z_2 und z_3 ein System von Fundamentalintegralen bilden sollten.

über, welche Gleichung wiederum unstatthaft ist; es bleibt somit nur noch der Fall $c = 0$, $m_3 = 0$ zu betrachten übrig, für welchen die Gleichungen (66.) und (67.) in

$$z_2' = z_2\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_2 z_3),\ z_3' = z_3\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, -z_2 z_3)$$

übergehen. Setzt man aber in die erste dieser beiden Gleichungen z_2+z_3 statt z_2, so muss nach dem oben bewiesenen Satze statt z_3 wegen $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 1$ der Ausdruck $m_2 z_2+(1+m_2)z_3$ substituirt werden, und man erhält

$$(\alpha.)\qquad z_2'+z_3' = (z_2+z_3)\omega\big(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, (z_2+z_3)(m_2(z_2+z_3)+z_3)\big)$$

oder vermöge der beiden obigen Beziehungen die wieder in z_2 und z_3 nothwendig identische Gleichung

$$\begin{aligned} &z_2\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_2 z_3)+z_3\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, -z_2 z_3)\\ &= (z_2+z_3)\omega\big(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, (z_2+z_3)(m_2(z_2+z_3)+z_3)\big);\end{aligned}$$

setzt man in dieser $z_3 = 0$, so folgt

$$z_2\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, 0) = z_2\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, m_2 z_2^2),$$

und somit wieder $m_2 = 0$, so dass $(\alpha.)$ in

$$z_2'+z_3' = (z_2+z_3)\omega\big(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_3(z_2+z_3)\big)$$

übergeht oder wiederum vermöge der obigen Beziehungen in

$$\begin{aligned} &z_2\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_2 z_3)+z_3\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, -z_2 z_3)\\ &= (z_2+z_3)\omega\big(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_3(z_2+z_3)\big),\end{aligned}$$

woraus sich für $z_2 = 0$

$$z_3\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, 0) = z_3\omega(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, z_3^2)$$

ergeben würde; es ist somit die Möglichkeit der Annahme einer algebraischen Beziehung von der Form (48.) überhaupt ausgeschlossen, wenn die Differentialgleichung (47.) mit Adjungirung von y_1 und dessen Ableitungen irreductibel war.

Es bedarf keines weiteren Nachweises, dass sämmtliche Schlüsse unverändert bestehen bleiben, wenn die Differentialgleichung zweiter Ordnung in der reducirten Form die Gestalt hat

$$(71.)\qquad z'' = \varphi(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m-1)}, y_2, y_2', \dots y_2^{(n-1)}, y_3, y_3', \dots y_3^{(p-1)}, \dots)z,$$

wenn y_1, y_2, y_3, ... Integrale algebraischer Differentialgleichungen $m$ter,

$n$ter, $p$ter, ... Ordnung sind, und die Annahme gemacht wird, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung irreductibel sei mit Adjungirung von y_1, y_2, y_3, ... und deren Ableitungen — ein Fall, der gleich nachher der weiteren Untersuchung sich darbieten wird.

Wir finden somit zunächst,

dass, wenn y_1, y_2, ... Integrale algebraischer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung bedeuten, für eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der reducirten Form mit algebraisch aus der unabhängigen Variabeln, den Integralen y_1, y_2, ... und deren Ableitungen zusammengesetzten Coefficienten nie auch mit Hinzuziehung der eben bezeichneten Grössen ein algebraischer Zusammenhang zwischen zwei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stattfinden kann, wenn die Differentialgleichung eine mit Adjungirung jener Grössen irreductible ist.

Daraus folgt aber mit Hülfe des oben bewiesenen Theorems,

dass für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung in der reducirten Form nur dann eine algebraische Beziehung zwischen drei Fundamentalintegralen derselben und deren Ableitungen bestehen kann, wenn die mit Hülfe eines dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der reducirten Form eine mit Adjungirung jenes Integrales und dessen Ableitungen reductible ist *).

---

*) Ich will hier bemerken, *dass, wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$(\alpha.) \quad z''+p_1z'+p_2z = 0$$

irreductibel ist, nothwendig auch die durch die Substitution

$$(\beta.) \quad z = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}.t$$

sich ergebende Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Normalform

$$(\gamma.) \quad t''+(p_2-\tfrac{1}{4}p_1^2-\tfrac{1}{2}p_1')t = 0$$

eine irreductible sein muss, wenn p_1 und p_2 algebraische Functionen von x und dem Integrale einer algebraischen Differentialgleichung und dessen Ableitungen sind, und die Irreductibilität der ersten Differentialgleichung die Adjungirung aller dieser Grössen zulässt. Da nämlich die Annahme der Reductibilität der Differentialgleichung ($\gamma.$), wie wir nachher zeigen werden, zur Folge hat, dass ($\gamma.$) ein Integral t_1 besitzt, welches einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\delta.) \quad \frac{dT}{dx} = QT$$

genügt, worin Q den Charakter von p_1 und p_2 hat, so wird, wenn

$$T = e^{\frac{1}{2}\int p_1 dx} Z$$

Umgekehrt wird, wenn die aus der Differentialgleichung

$$(72.) \qquad y''' = p_2 y' + p_3 y$$

durch die Substitution

$$(73.) \qquad y = y_1 \int z y_1^{-\frac{3}{2}} dx$$

hervorgegangene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(74.) \qquad z'' = (\tfrac{3}{4} y_1^{-2} y_1'^2 - \tfrac{3}{2} y_1^{-1} y_1'' + p_2) z$$

mit Adjungirung von y_1 und dessen Ableitungen reductibel ist, für drei Fundamentalintegrale und deren Ableitungen der Differentialgleichung (72.) ***eine algebraische Beziehung stattfinden.*** Denn wenn (74.) reductibel ist, so wird eines seiner Integrale einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügen, deren Coefficienten algebraisch aus x, y_1, y_1', y_1'' zusammengesetzt sind, und es wird somit, wenn jenes Integral durch $\varkappa_2 z_2 + \varkappa_3 z_3$ dargestellt wird, worin z_2 und z_3 zwei Fundamentalintegrale von (74.) bedeuten, und die Differentialgleichung erster Ordnung die Form hat

$$(75.) \qquad f(x, y_1, y_1', y_1'', z, z') = 0,$$

die Beziehung bestehen

$$(76.) \qquad f(x, y_1, y_1', y_1'', \varkappa_2 z_2 + \varkappa_3 z_3, \varkappa_2 z_2' + \varkappa_3 z_3') = 0.$$

Nennt man nun die nach (73.) dem z_2 und z_3 entsprechenden Werthe von y y_2 und y_3, so dass

$$(77.) \qquad z_2 = y_1^{-\frac{1}{2}}(y_1 y_2' - y_2 y_1'), \quad z_3 = y_1^{-\frac{1}{2}}(y_1 y_3' - y_3 y_1')$$

wird, so ergiebt sich aus (76.)

$$(78.) \qquad \begin{cases} f_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_1^{-\frac{1}{2}}[\varkappa_2(y_1 y_2' - y_2 y_1') + \varkappa_3(y_1 y_3' - y_3 y_1')], \\ \quad y_1^{-\frac{1}{2}}[\varkappa_2(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + \varkappa_3(y_1 y_3'' - y_3 y_1'')]) = 0 \end{cases}$$

als Relation *) zwischen drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen

---

gesetzt wird, die Differentialgleichung

$$Z' = (Q - \tfrac{1}{2} p_1) Z$$

mit der Differentialgleichung (α.) das der Substitution

$$z_1 = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} . t_1$$

entsprechende Integral gemein haben, also auch die Differentialgleichung (α.) mit Adjungirung der angegebenen Grössen reductibel sein.

*) Würde man das Integral von (74.), welches der Differentialgleichung (75.) genügt, mit z_1 bezeichnen, so dass

$$(\alpha.) \qquad f(x, y_1, y_1', y_1'', z_1, z_1') = 0$$

für die Differentialgleichung dritter Ordnung, die, wie früher gezeigt worden, von der Determinantenbeziehung (22.) verschieden ist, wenn (76.) verschieden ist von

$$\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3' - \mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_2' = a.$$

Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung in reducirter Form ausser der Determinantenbeziehung noch eine algebraische Relation zwischen der unabhängigen Variabeln, drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen besteht, ist die, dass die mit Hülfe eines dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der reducirten Form mit Adjungirung dieses Integrales und dessen Ableitungen reductibel ist — und die gesuchten Relationen sind bekannt, wenn man die algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung aufstellen kann, denen die Integrale jener Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen.

Die Untersuchung der in der vorliegenden Arbeit aufgeworfenen Frage ist also darauf zurückgeführt, zu entscheiden, wann eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der reducirten Form (74.) — wobei diese Form nach der obigen Anmerkung unwesentlich ist — reductibel ist, und wie die Differentialgleichungen erster Ordnung aussehen, denen ihre Integrale genügen.

Bevor wir nun aber diese Untersuchung aufnehmen, wollen wir zunächst die oben eingeführte Beschränkung beseitigen, dass die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung in der reducirten Form gegeben sein sollte, und wollen die Differentialgleichung

$$(79.) \qquad y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = 0$$

---

befriedigt wird, so würde die gesuchte Relation vermöge der Substitution

$$Y_1 = y_1 \int z_1 y_1^{-\frac{3}{2}}\, dx$$

die Form annehmen

$$f_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_1^{-\frac{1}{2}}(y_1 Y_1' - Y_1 y_1'),\quad y_1^{-\frac{1}{2}}(y_1 Y_1'' - Y_1 y_1'')) = 0,$$

und man erhielte somit stets zwischen zwei particulären Integralen der Differentialgleichung dritter Ordnung eine algebraische Beziehung

$$F(x, y_1, y_1', y_1'', Y_1, Y_1', Y_1'') = 0,$$

analog derjenigen Relation, die man aus zweien der Gleichungen (36.) dadurch erhält, dass man die eine derselben differentiirt und der anderen gleich setzt. Es wird nachher gezeigt werden, dass die Differentialgleichung (α.) stets als eine lineare homogene erster Ordnung angenommen werden darf.

zu Grunde legen, für deren drei Fundamentalintegrale y_1, y_2, y_3 und deren Ableitungen eine algebraische Beziehung

$$(80.) \qquad F(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'') = 0$$

stattfinden soll, wobei diese Grössen bekanntlich durch die Gleichung mit einander verbunden sind

$$(81.) \qquad D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = a e^{-\int p_1 dx},$$

wenn a eine bestimmte Constante bedeutet, und unmittelbar ersichtlich ist, dass $D - a e^{-\int p_1 dx}$ nicht identisch in der linken Seite von (80.) enthalten sein kann. Differentiirt man (80.) nach x und schafft y_1''', y_2''', y_3''' vermöge (79.) algebraisch heraus, so erhält man eine der Relation (80.) ähnliche zwischen denselben Grössen

$$(82.) \qquad F_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', y_3, y_3', y_3'') = 0,$$

die entweder, was man genau so wie oben für die Gleichungen (23.) und (24.) erweist, von $F = 0$ unabhängig ist oder wiederum einer anderen algebraischen Beziehung ihre Entstehung giebt, die nicht durch die linke Seite von (80.) identisch erfüllt wird, so dass jedenfalls, wie oben, so auch *für die nicht reducirte Differentialgleichung dritter Ordnung, wenn überhaupt eine, dann jedenfalls zwei von einander unabhängige Beziehungen zwischen drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen existiren werden.*

Aus der Zusammenstellung der drei Gleichungen (80.), (81.), (82.) folgt aber

$$(83.) \qquad \begin{cases} y_3 = F_0(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', e^{-\int p_1 dx}), \\ y_3' = F_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', e^{-\int p_1 dx}), \\ y_3'' = F_2(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'', e^{-\int p_1 dx}); \end{cases}$$

setzt man nun

$$(84.) \qquad y = y_1 \int z y_1^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} dx$$

in (79.) ein, so erhält man die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in reducirter Form

$$(85.) \qquad z'' + (\tfrac{3}{2} y_1'' y_1^{-1} - \tfrac{3}{4} y_1^{-2} y_1'^2 - \tfrac{1}{2} p_1' - \tfrac{1}{4} p_1^2 + \tfrac{1}{2} p_1 y_1^{-1} y_1' + p_2) z = 0,$$

und man sieht auch sogleich wieder wie oben, dass die vermöge (84.) den Integralen y_2, y_3 entsprechenden Integrale z_2 und z_3 Fundamentalintegrale

dieser Gleichung sind. Aus der ersten der Gleichungen (83.) ergiebt sich nun nach (84.)

$$(86.)\quad \begin{cases} \int z_3 y_1^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}\, dx = \dfrac{1}{y_1} F_0\Big(x, y_1, y_1', y_1'', y_1 \int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}\, dx, \\ \qquad\qquad y_1' \int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}\, dx + z_2 y_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}, \\ y_1'' \int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} dx + \frac{1}{2} z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} y_1' e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} + z_2' y_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} - \frac{1}{2} p_1 z_2 y_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}, e^{-\int p_1 dx}\Big), \end{cases}$$

und durch Differentiation mit Benutzung von (79.) und (85.)

$$(87.)\quad z_3 = f(x, y_1, y_1', y_1'', z_2, z_2', e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}, \int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} dx),$$

wobei es aus den oben angegebenen Gründen wiederum wesentlich ist, dass z_3 ohne Ableitung in dieser Gleichung vorkommt; setzt man diese Gleichung in die Form

$$\int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} dx = \varphi(x, y_1, y_1', y_1'', z_2, z_2', z_3, e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}),$$

worin φ von z_3 nicht unabhängig ist, so folgt wieder durch Differentiation

$$(88.)\quad z_2 = \psi(x, y_1, y_1', y_1'', z_2, z_2', z_3, z_3', e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx})$$

oder endlich

$$(89.)\quad \omega(x, y_1, y_1', y_1'', z_2, z_2', z_3, z_3', e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}) = 0,$$

die wieder, ganz wie oben, von (49.) verschieden sein muss, und es ergiebt sich somit die folgende Verallgemeinerung des oben bewiesenen Satzes:

Wenn für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung eine algebraische Beziehung zwischen drei Fundamentalintegralen derselben und deren Ableitungen besteht, so existirt auch stets für die mit Hülfe eines dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der reducirten Form eine algebraische Relation zwischen zweien ihrer Fundamentalintegrale und deren Ableitungen mit Adjungirung jenes einen zu Hülfe genommenen Integrales, dessen Ableitungen und der Exponentialfunction, deren Exponent durch die Quadratur über den ersten Coefficienten der gegebenen Differentialgleichung dritter Ordnung dargestellt ist.

Es bleibt also auch hier wiederum nur die Frage zu erörtern übrig, unter welchen Bedingungen für die Differentialgleichung (85.) eine Beziehung der angegebenen Art stattfinden kann und wann nicht.

Benutzt man aber den oben von der Existenz einer solchen Relation für eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung bewiesenen

Satz, indem man $e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}$ als Integral der algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}p_1 y$$

auffasst, so ergiebt sich mit Hülfe des eben bewiesenen Satzes das nachfolgende Theorem:

Für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung kann nur dann eine algebraische Beziehung zwischen drei Fundamentalintegralen derselben und deren Ableitungen bestehen, wenn die mit Hülfe eines dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der reducirten Form eine mit Adjungirung jenes Integrales, dessen Ableitungen und der Exponentialgrösse, deren Exponent die Quadratur über den ersten Coefficienten der gegebenen Differentialgleichung dritter Ordnung darstellt, reductible ist.

Umgekehrt wird, wenn die aus der Differentialgleichung

$$(87^*.) \qquad y'''+p_1y''+p_2y'+p_3y = 0$$

durch die Substitution

$$(88^*.) \qquad y = y_1\int z y_1^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} dx$$

hervorgegangene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(89^*.) \qquad z''+(\tfrac{3}{2}y_1''y_1^{-1}-\tfrac{3}{4}y_1^{-2}y_1'^2-\tfrac{1}{2}p_1'-\tfrac{1}{4}p_1^2+\tfrac{1}{2}p_1y_1^{-1}y_1'+p_2)z = 0$$

mit Adjungirung von x, y_1, y_1', y_1'' und $e^{\int p_1 dx}$ reductibel ist, für drei Fundamentalintegrale und deren Ableitungen der Differentialgleichung (87*.) ***eine algebraische Beziehung stattfinden.*** Denn wenn (89*.) reductibel ist, so wird eines seiner Integrale einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form genügen

$$(90.) \qquad f(x, y_1, y_1', y_1'', e^{\int p_1 dx}, z, z') = 0,$$

und somit, wenn jenes Integral durch $z_2z_2+z_3z_3$ bezeichnet wird, worin z_2 und z_3 zwei Fundamentalintegrale von (89*.) bedeuten,

$$(91.) \qquad f(x, y_1, y_1', y_1'', e^{\int p_1 dx}, z_2z_2+z_3z_3, z_2z_2'+z_3z_3') = 0$$

sein. Nennt man nun die nach (88*.) dem z_2 und z_3 entsprechenden Werthe von y y_2 und y_3, so dass

$$(92.) \qquad z_2 = y_1^{-\frac{1}{2}}(y_1y_2'-y_2y_1')e^{\frac{1}{2}\int p_1 dx}, \quad z_3 = y_1^{-\frac{1}{2}}(y_1y_3'-y_3y_1')e^{\frac{1}{2}\int p_1 dx},$$

so ergiebt sich aus (91.) zunächst

$$(93.) \qquad \begin{cases} f_1(x, y_1, y_1', y_1'', e^{\int p_1 dx}, [z_2(y_1y_2'-y_2y_1')+z_3(y_1y_3'-y_3y_1')]y_1^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\int p_1 dx}, \\ \qquad [z_2(y_1y_2''-y_2y_1'')+z_3(y_1y_3''-y_3y_1'')]y_1^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\int p_1 dx}) = 0; \end{cases}$$

und durch Elimination der Exponentialgrösse $e^{\int p_1 dx}$ zwischen dieser Gleichung und (81.) die gesuchte Relation.

Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung eine algebraische Relation zwischen der unabhängigen Variabeln, drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen besteht, ist die, dass die mit Hülfe eines dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der reducirten Form mit Adjungirung dieses Integrales, dessen Ableitungen und der Exponentialfunction, deren Exponent durch die Quadratur über den ersten Coefficienten der Differentialgleichung dritter Ordnung dargestellt wird, reductibel ist — und die gesuchten Relationen sind bekannt, wenn man die Differentialgleichungen erster Ordnung aufstellen kann, denen die Integrale jener Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen.

Nachdem nun alles auf die Untersuchung der Reductibilitätsbedingungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt worden, und ausserdem in einer früheren Anmerkung gezeigt war, dass man diese Differentialgleichung in der reducirten Form voraussetzen darf, gehen wir von der Differentialgleichung

$$(94.) \qquad z'' = \varphi(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)z$$

aus, in welcher φ eine algebraische Function und y_1, y_2, ... Integrale algebraischer Differentialgleichungen $m$ter, $n$ter, ... Ordnung bedeuten, und suchen die Eigenschaften einer solchen Differentialgleichung zu bestimmen, wenn verlangt wird, dass dieselbe mit Adjungirung von y_1, y_1', ... y_2, y_2', ... reductibel sei, wobei wir die drei Fälle zum Zwecke der Untersuchung von einander trennen, in denen die Differentialgleichung dadurch reductibel wird, dass sie ein in x, y_1, y_1', ... y_2, y_2', ... algebraisches Integral hat, oder zwei ihrer Integrale in einer mit Adjungirung der angegebenen Grössen algebraischen Beziehung zu einander stehen oder endlich die Reductibilität statt hat, ohne dass die Differentialgleichung eine dieser beiden Eigenschaften besitzt.

Hat also

I. die Differentialgleichung (94.) ein algebraisches Integral

$$(95.) \qquad z = f(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots),$$

so folgt von selbst die Reductibilität derselben, während über das zugehörige Fundamentalintegral sich nichts aussagen lässt.

Bestehe

II. zwischen zwei Fundamentalintegralen z_2 und z_3 derselben eine algebraische Beziehung (stets mit Adjungirung von $x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots$)

$$(96.) \qquad z_3 = \omega(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots z_2),$$

so folgt

$$(97.) \qquad z_3' = \frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial\omega}{\partial y_1'} y_1'' + \cdots + \frac{\partial\omega}{\partial y_2} y_2' + \frac{\partial\omega}{\partial y_2'} y_2'' + \cdots + \frac{\partial\omega}{\partial z_2} z_2',$$

und durch Einsetzen von (96.) und (97.) in die Relation

$$(98.) \qquad z_2 z_3' - z_3 z_2' = a$$

ergiebt sich

$$(99.) \qquad z_2\left\{\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y_1} y_1' + \cdots + \frac{\partial\omega}{\partial y_2} y_2' + \cdots + \frac{\partial\omega}{\partial z_2} z_2'\right\} - z_2'\omega = a.$$

Da nun z_2 einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, so wäre die Reductibilität der Differentialgleichung (94.) erwiesen, wenn die Gleichung (99.) nicht identisch verschwinden könnte; dass dies aber nicht der Fall sein kann, geht daraus hervor, dass dann der Coefficient von z_2' verschwinden, also

$$z_2 \frac{\partial\omega}{\partial z_2} - \omega = 0 \quad \text{oder} \quad \omega = \Omega(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots) z_2$$

sein müsste, und in Folge dessen die Beziehung (99.) in

$$z_2^2 \Omega' = a$$

überginge, welche, weil z_2 nicht algebraisch sein sollte (ad Fall I. gehörig), unerfüllbar ist; die Differentialgleichung (94.) ist also reductibel. Aber es wird uns auch gelingen, die Form der Function ω zu bestimmen.

Da nämlich die mit der Differentialgleichung (94.) gleichartige erster Ordnung (99.) mit jener das Integral z_2 gemein hat, und dieses der Annahme nach nicht algebraisch durch $x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots$ ausdrückbar ist, so wird bekanntlich jedes Integral von (99.) auch (94.) angehören, oder es werden sämmtliche Integrale der Differentialgleichung (99.) die Form haben $\mu_2 z_2 + \mu_3 z_3$, worin μ_2 und μ_3 durch irgend eine Beziehung von einander abhängen. Bildet man nun

$$(100.) \qquad \zeta = \omega(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3),$$

so wird sich ζ' von z_3' nur dadurch unterscheiden, dass z_2 und z_2' durch $\mu_2 z_2 + \mu_3 z_3$ und $\mu_2 z_2' + \mu_3 z_3'$ ersetzt sind, und es wird somit der Werth von ζ der Gleichung

$$(101.) \qquad (\mu_2 z_2 + \mu_3 z_3)\zeta' - \zeta(\mu_2 z_2' + \mu_3 z_3') = a$$

genügen, da diese nichts anderes als (99.) nach Substitution von $\mu_2 z_2+\mu_3 z_3$ statt z_2 ist. Da aber alle Integrale der Differentialgleichung (101.) in der Form enthalten sind

$$(102.) \qquad \zeta = m_2 z_2+m_3 z_3,$$

worin m_2 und m_3 mit μ_2 und μ_3 durch die Gleichung verbunden sind

$$(103.) \qquad \mu_2 m_3-\mu_3 m_2 = 1,$$

so folgt, dass die algebraische Beziehung (96.) erhalten bleibt, wenn

$$z_2 \text{ durch } \mu_2 z_2+\mu_3 z_3, \quad z_3 \text{ durch } m_2 z_2+\frac{1+m_2\mu_3}{\mu_2} z_3$$

ersetzt wird, worin μ_3 und m_2 bestimmte Functionen von μ_2 bedeuten, und es ergiebt sich somit

$$(104.) \qquad \omega(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots \mu_2 z_2+\mu_3 \omega) = m_2 z_2+\frac{1+m_2\mu_3}{\mu_2}\omega,$$

worin die kurze Bezeichnung ω die rechte Seite der Gleichung (96.) bedeutet. Da nun z_2 nicht algebraisch von x, y_1, y_1', $\ldots$ y_2, y_2', $\ldots$ abhängen soll, so muss diese Gleichung identisch sein, und wird (104.) nach den willkürlichen Grössen z_2 und μ_2 differentiirt, so erhält man

$$\frac{\partial\omega(x, y_1, \ldots y_2, \ldots \mu_2 z_2+\mu_3\omega)}{\partial(\mu_2 z_2+\mu_3\omega)}\left(\mu_2+\mu_3\frac{\partial\omega}{\partial z_2}\right) = m_2+\frac{1+m_2\mu_3}{\mu_2}\frac{\partial\omega}{\partial z_2},$$

$$\frac{\partial\omega(x, y_1, \ldots y_2, \ldots \mu_2 z_2+\mu_3\omega)}{\partial(\mu_2 z_2+\mu_3\omega)}(z_2+\omega\mu_3') = m_2' z_2+\left(\frac{1+m_2\mu_3}{\mu_2}\right)'\omega,$$

und hieraus

$$(105.) \qquad A\omega\frac{\partial\omega}{\partial z_2}+Bz_2\frac{\partial\omega}{\partial z_2}+C\omega+Dz_2 = 0,$$

worin A, B, C, D von μ_2 abhängige Constanten sind, die im schliesslichen Ausdrucke von ω in Verbindungen vorkommen werden, die rein numerisch sind. Setzt man diese Differentialgleichung in die Form

$$(106.) \qquad (A\omega+Bz_2)d\omega+(C\omega+Dz_2)dz_2 = 0,$$

so erhält man durch die Substitution $\omega = z_2.u$

$$(107.) \qquad \frac{dz_2}{z_2}+\frac{Au+B}{Au^2+(B+C)u+D}du = 0$$

oder

$$(108.) \qquad \log z_2 = -\int\frac{Au+B}{Au^2+(B+C)u+D}du+\log\psi(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots).$$

Nun ist, wenn A von Null verschieden,

$$\frac{Au+B}{Au^2+(B+C)u+D} = \frac{\lambda}{u-\alpha}+\frac{1-\lambda}{u-\beta},$$

wenn*)

$$\alpha = -\frac{B+C}{2A} + \frac{\sqrt{(B+C)^2-4AD}}{2A}, \quad \beta = -\frac{B+C}{2A} - \frac{\sqrt{(B+C)^2-4AD}}{2A},$$

$$\lambda = \frac{\frac{B-C}{2} + \frac{\sqrt{(B+C)^2-4AD}}{2}}{\sqrt{(B+C)^2-4AD}}$$

gesetzt wird, und daher nach (108.)

$$(109.) \qquad \frac{\psi}{z_2} = \left(\frac{u-\alpha}{u-\beta}\right)^{\lambda}(u-\beta),$$

worin λ eine rationale Zahl sein muss, da ω, also auch u eine algebraische Function von z_2 sein soll, so dass sich endlich nach (96.)

$$(110.) \qquad \left(\frac{z_3-\alpha z_2}{z_3-\beta z_2}\right)^{\lambda}(z_3-\beta z_2) = \psi(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)$$

ergiebt. Setzt man nun

$$z_3-\alpha z_2 = Z_3, \quad z_3-\beta z_2 = Z_2,$$

so sind auch Z_2 und Z_3 Fundamentalintegrale der Differentialgleichung (94.), da im entgegengesetzten Falle $\alpha = \beta$ sein müsste, und es geht dann die Beziehung (110.) in

$$(111.) \qquad Z_3 = \chi(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots).Z_2^{\sigma}$$

über, worin χ eine algebraische Function und σ eine rationale Zahl bedeutet.

Es bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, in dem $A = 0$ ist, und also die Gleichung (108.) in

$$\log z_2 = -\frac{B}{B+C}\log\left(u+\frac{D}{B+C}\right)+\log\psi(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)$$

---

*) Wenn $\alpha = \beta$, so wird

$$\frac{Au+B}{A(u-\alpha)^2} = \frac{1}{u-\alpha} + \frac{B+A\alpha}{A}\frac{1}{(u-\alpha)^2},$$

und die Gleichung (108.) geht somit über in

$$\log\psi-\log z_2 = \log(u-\alpha)-\frac{B+A\alpha}{A}\cdot\frac{1}{u-\alpha},$$

woraus, weil u algebraisch durch z_2, x, y_1, $\ldots$ y_2, $\ldots$ ausgedrückt sein soll, $B+A\alpha = 0$ oder $B = C$ folgt und

$$\frac{\psi}{z_2} = u-\alpha \quad \text{oder} \quad z_3-\alpha z_2 = \psi(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots).$$

Daraus würde aber folgen, dass, weil z_2 und z_3 Integrale von (94.) sind, auch ψ ein solches sein müsste, und wir würden dann auf den Fall I. zurückgeführt sein, in welchem die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ein in x, y_1, y_1', $\ldots$ y_2, y_2', $\ldots$ algebraisches Integral besitzt.

oder

$$\frac{\psi}{z_2} = \left(u + \frac{D}{B+C}\right)^{\frac{B}{B+C}}$$

übergeht; man sieht, dass in diesem Falle $\frac{B}{C}$ eine rationale Zahl sein muss, und somit

$$\frac{\psi}{z_2} = \frac{(z_3 + hz_2)^\lambda}{z_2^\lambda},$$

worin h eine Constante und λ rational ist, oder endlich, wenn $z_3 + hz_2 = Z_3$, $z_2 = Z_2$ gesetzt wird, wieder wie oben

$$Z_3 = \chi(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots).Z_2^\sigma.$$

Es bleibt somit nur noch die Frage zu beantworten, wie eine lineare homogene Differentialgleichung (94.) beschaffen ist, wenn zwei ihrer Fundamentalintegrale in der durch die Gleichung (111.) ausgedrückten Beziehung zu einander stehen. Nun folgt aber aus (111.)

$$Z_3' = \sigma\chi Z_2^{\sigma-1}Z_2' + Z_2^\sigma\chi', \quad Z_3'' = \sigma\chi Z_2^{\sigma-1}Z_2'' + 2\sigma\chi' Z_2^{\sigma-1}Z_2' + \sigma(\sigma-1)\chi Z_2^{\sigma-2}Z_2'^2 + Z_2^\sigma\chi'',$$

oder da $Z_2'' = \varphi.Z_2$, $Z_3'' = \varphi.Z_3$ ist, nach (111.)

$$\varphi.\chi.Z_2^\sigma = \sigma\chi\varphi Z_2^\sigma + 2\sigma\chi' Z_2^{\sigma-1}Z_2' + \sigma(\sigma-1)\chi Z_2^{\sigma-2}Z_2'^2 + Z_2^\sigma\chi''$$

oder

$$Z_2'^2 + \frac{2\chi'.Z_2}{(\sigma-1)\chi}.Z_2' = \frac{(1-\sigma)\varphi\chi - \chi''}{\sigma(\sigma-1)\chi}Z_2^2,$$

woraus sich wiederum

$$(112.) \qquad Z_2' = \Theta(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)Z_2$$

ergiebt, und *somit das Integral Z_2 der Differentialgleichung* (94.) *einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung genügt; dasselbe gilt offenbar von dem Integrale Z_3.*

Wir finden somit, *dass, wenn für zwei Fundamentalintegrale der Differentialgleichung* (94.) *eine mit Adjungirung von x, y_1, y_1', $\ldots$ y_2, y_2', $\ldots$ algebraische Beziehung besteht, diese Differentialgleichung reductibel ist und die Eigenschaft hat, dass stets zwei und nur zwei Fundamentalintegrale homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung Genüge leisten**), *wenn die Differentialgleichung nicht selbst algebraische Integrale besitzt.*

---

*) Da jedes andere particuläre Integral der Differentialgleichung (94.) von der Form

$$z = \varrho_1 Z_2 + \varrho_2 Z_3$$

ist, so würde die Annahme, dass auch dieses einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$Z' = H(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots).Z$$

Gehen wir endlich zu dem Falle über, in welchem

III. die lineare homogene Differentialgleichung (94.) mit Adjungirung von x, y_1, y_1', ... y_2, y_2', ... reductibel ist, ohne dass dieselbe ein in diesen Grössen algebraisches Integral besitzt (Fall I.), und ohne dass zwischen zwei Fundamentalintegralen eine in jenen Grössen algebraische Beziehung stattfindet (Fall II.), so wird (94.) ein Integral mit einer algebraisch irreductibeln Differentialgleichung erster Ordnung

$$(113.) \qquad z' = \omega(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots, z)$$

gemein haben. Sei dieses Z_1, so dass

$$Z_1' = \omega(x, y_1, \ldots, y_2, \ldots, Z_1), \quad Z_1'' = \frac{d\omega}{dx} + \frac{\partial\omega}{\partial Z_1}\omega$$

wird, worin in $\frac{d\omega}{dx}$ nur die Differentiation nach Z_1 ausgeschlossen ist, so folgt aus (94.):

---

genügt, durch Zusammenstellung mit den beiden Gleichungen

$$(\alpha.) \qquad Z_2' = \Theta(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots).Z_2, \quad Z_3' = \Theta_1(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots).Z_3$$

die Relation nach sich ziehen

$$\varrho_1 \Theta Z_2 + \varrho_2 \Theta_1 Z_3 = H.(\varrho_1 Z_2 + \varrho_2 Z_3)$$

oder vermöge (111.)

$$\varrho_1(\Theta - H).Z_2 = \varrho_2(H - \Theta_1)\chi.Z_2^{\sigma},$$

woraus, da Θ nicht Θ_1 gleich sein kann, und Z_2 nicht algebraisch durch $x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots$ ausdrückbar sein sollte, $\sigma = 1$ folgt; es werden somit die anderen particulären Integrale nur dann ebenfalls homogenen linearen Differentialgleichungen genügen können, wenn die zwischen den beiden Fundamentalintegralen bestehende algebraische Beziehung

$$Z_3 = \chi(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots).Z_2$$

lautet.

In diesem Falle geht, wie leicht zu sehen, die obige Differentialgleichung (112.) für Z_2' in

$$2\chi' Z_2' + \chi'' Z_2 = 0$$

über, deren Integral

$$Z_2 = c\chi'(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)^{-\frac{1}{2}}$$

gegen die Voraussetzung ein algebraisches wäre, also können ***nur*** zwei Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen. Im Allgemeinen wird das Integral

$$z = \varrho_1 Z_2 + \varrho_2 Z_3,$$

woraus nach (α.)

$$z' = \varrho_1 Z_2' + \varrho_2 Z_3' = \varrho_1 \Theta Z_2 + \varrho_2 \Theta_1 Z_3$$

folgt, vermöge der Beziehung (111.) der ***nicht*** linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügen

$$\frac{z' - \Theta z}{(\Theta_1 - \Theta)\varrho_2} = \chi.\left(\frac{z' - \Theta_1 z}{(\Theta - \Theta_1)\varrho_1}\right)^{\sigma}.$$

$$(114.) \qquad \frac{d\omega}{dx}+\frac{\partial\omega}{\partial Z_1}\omega = \varphi.Z_1,$$

und diese Gleichung muss wieder, da (94.) kein in x, y_1, y_1', ... y_2, y_2', ... algebraisches Integral besitzen sollte, eine in Z_1 identische sein; daraus folgt nach Schlüssen, wie sie wiederholt vorgekommen, dass jedes Integral der Differentialgleichung erster Ordnung (113.) ein Integral von (94.) sein muss, oder dass sämmtliche Integrale von (113.) in der Form

$$(115.) \qquad Z = m_2 z_2 + m_3 z_3$$

enthalten sein müssen, worin m_3 von m_2 abhängig, und z_2, z_3 zwei Fundamentalintegrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung (94.) sind. Bezeichnet man nun zwei particuläre Integrale von (113.) mit Z_2 und Z_3, so folgt aus (115.)

$$(116.) \qquad Z_2 = m_{22} z_2 + m_{32} z_3, \quad Z_3 = m_{23} z_2 + m_{33} z_3,$$

und somit das allgemeine Integral von (113.) nach (115.) und (116.), indem man aus den letzteren Gleichungen z_2 und z_3 durch Z_2 und Z_3 ausdrückt*) und in (115.) einsetzt,

$$(117.) \qquad Z = R_2 Z_2 + R_3 Z_3,$$

worin R_2 und R_3 von einer willkürlichen Constanten abhängen. Setzt man diese Integralform in (113.) ein, so folgt

$$(118.) \qquad \begin{cases} \omega(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots R_2 Z_2 + R_3 Z_3) \\ = R_2 \omega(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots Z_2) + R_3 \omega(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots Z_3), \end{cases}$$

und da nach Behandlung des Falles II. die Möglichkeit ausgeschlossen ist, dass zwei particuläre Integrale z_2 und z_3 der Differentialgleichung (94.), also auch zwei Integrale Z_2 und Z_3 der Differentialgleichung (113.) in einer mit Adjungirung von x, y_1, y_1', ... y_2, y_2', ... algebraischen Beziehung zu einander stehen, so wird die Gleichung (118.) eine in Z_2 und Z_3 identische sein müssen. Dann ergiebt aber die Differentiation nach Z_2 und Z_3:

---

*) Für den Fall, dass $m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32} = 0$ wird, wähle man zwei andere particuläre Integrale der Differentialgleichung (113.), und würde die Determinante für jede willkürliche Wahl der particulären Integrale verschwinden, so wäre das allgemeine Integral Z mit einem particulären Z_1 durch die Beziehung verbunden

$$Z = \varkappa Z_1,$$

worin $\varkappa$ eine willkürliche Constante, und daraus ergäbe sich (113.) als lineare homogene Differentialgleichung, ein specieller Fall des oben zu ermittelnden Resultates.

$$\frac{\partial\omega(x, y_1, \ldots y_2, \ldots R_2 Z_2 + R_3 Z_3)}{\partial(R_2 Z_2 + R_3 Z_3)} = \frac{\partial\omega(x, y_1, \ldots y_2, \ldots Z_2)}{\partial Z_2},$$

$$\frac{\partial\omega(x, y_1, \ldots y_2, \ldots R_2 Z_2 + R_3 Z_3)}{\partial(R_2 Z_2 + R_3 Z_3)} = \frac{\partial\omega(x, y_1, \ldots y_2, \ldots Z_3)}{\partial Z_3}.$$

und somit

$$(119.) \qquad \frac{\partial\omega(x, y_1, \ldots y_2, \ldots Z_2)}{\partial Z_2} = \frac{\partial\omega(x, y_1, \ldots y_2, \ldots Z_3)}{\partial Z_3},$$

woraus sich ω als lineare Function von Z in der Form ergiebt

$$(120.) \qquad \omega(x, y_1, \ldots y_2, \ldots Z) = \omega_1(x, y_1, \ldots y_2, \ldots).Z + \omega_2(x, y_1, \ldots y_2, \ldots).$$

Setzt man diesen Werth in die Functionalgleichung (118.) ein, so ergiebt sich

$$\omega_2(x, y_1, \ldots y_2, \ldots) = (R_2 + R_3)\omega_2(x, y_1, \ldots y_2, \ldots),$$

und hieraus entweder $\omega_2(x, y_1, \ldots y_2, \ldots) = 0$ oder $R_2 = -R_3$; im ersten Falle würde vermöge (113.) und (120.) die Differentialgleichung erster Ordnung, welcher ein Integral der reductibeln linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt,

$$(121.) \qquad z' = \omega_1(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)z$$

lauten, also eine homogene lineare sein; im zweiten Falle würde ihre Form die der linearen

$$(122.) \qquad z' = \omega_1(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)z + \omega_2(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)$$

sein, wobei nach (117.) ihr allgemeines Integral mit zwei particulären durch die Beziehung verbunden wäre

$$(123.) \qquad Z = R_2(Z_2 - Z_3);$$

da aber im letzteren Falle

$$Z' = R_2(Z_2' - Z_3') = R_2\omega_1(Z_2 - Z_3) = \omega_1 Z$$

ist, so folgt wiederum $\omega_2 = 0$ und für (113.) die Form (121.). *Es genügt somit im Falle III. jedes Integral einer reductibeln linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung.*

Fassen wir nun die für die drei Fälle gefundenen Resultate zusammen, so erhalten wir den nachfolgenden Satz:

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten algebraisch aus der unabhängigen Variabeln, Integralen algebraischer Differentialgleichungen und deren Ableitungen zusammengesetzt

sind, reductibel ist, so hat dieselbe entweder ein in diesen Grössen algebraisch zusammengesetztes Integral oder, wenn dies nicht der Fall ist, giebt es entweder zwei und nur zwei particuläre Fundamentalintegrale, welche linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung mit gleichartig zusammengesetzten Coefficienten genügen, und zwar dann und nur dann, wenn zwei particuläre Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung in einer mit Adjungirung der bezeichneten Grössen algebraischen Beziehung zu einander stehen, wobei alle anderen Integrale gleichartigen Differentialgleichungen erster Ordnung aber höheren Grades genügen, oder es leisten, wenn eine solche algebraische Beziehung ausgeschlossen ist, sämmtliche Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung Genüge.

Bemerkt man aber, dass die Integrale der linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung sich in der Form darstellen

$$(\alpha.) \qquad e^{\int f(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)dx},$$

worin f eine algebraische Function bedeutet, ***so wird eine reductible lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung entweder algebraische Integrale oder zwei und nur zwei Integrale der Form*** $(\alpha.)$ ***oder sämmtliche Integrale in der Form*** $(\alpha.)$ ***besitzen.***

Beachtet man endlich, dass die Differentialgleichung (94.) durch die Substitution

$$(124.) \qquad z = e^{-\int t dx} \quad \text{oder} \quad t = -\frac{z'}{z}$$

in die Differentialgleichung erster Ordnung

$$(125.) \qquad t' = t^2 - \varphi(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)$$

übergeht, so wird das einem algebraischen z entsprechende t der Differentialgleichung (125.) ebenfalls algebraisch sein, und dasselbe wird stattfinden, wenn z die Form $(\alpha.)$ hat, da der entsprechende Werth von t

$$t = -f(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)$$

lautet, also wiederum algebraisch ist, und umgekehrt wird, wenn ein Integral t der Differentialgleichung (125.) algebraisch ist, das entsprechende Integral der Differentialgleichung (94.) die Form $(\alpha.)$ besitzen, und wir können daher auch den oben gefundenen Satz so aussprechen:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung

$$z'' = \varphi(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)z$$

reductibel ist, ist die, dass die Differentialgleichung erster Ordnung

$$t' = t^2 - \varphi(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)$$

ein algebraisches Integral besitzt, und zwar hat die Differentialgleichung zweiter Ordnung ein und nur ein algebraisches Integral, wenn die Differentialgleichung erster Ordnung nur ein algebraisches Integral besitzt *), *und es stehen zwei Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander, wenn die letztere Differentialgleichung durch zwei und nur zwei algebraische Integrale befriedigt wird, während für den Fall, dass die Differentialgleichung erster Ordnung nur algebraische Integrale besitzt* **), *Reductibilität der Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne Existenz algebraischer Beziehungen zwischen den Integralen selbst stattfindet.*

Stellen wir die eben gefundenen Sätze mit den oben hergeleiteten zusammen, so ergiebt sich das nachfolgende Theorem:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung eine algebraische Relation zwischen der unabhängigen Variabeln, drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen besteht, ist die, dass die mit Hülfe eines dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung entweder ein mit Adjungirung dieses Integrales, dessen Ableitungen und der Exponentialfunction, deren Exponent durch die Quadratur über den ersten Coefficienten der Differentialgleichung dritter Ordnung dargestellt wird, algebraisches Integral

---

*) denn hätte sie gar kein algebraisches Integral, so würde das dem algebraischen Integrale der Differentialgleichung erster Ordnung entsprechende Exponentialintegral jedenfalls einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung genügen, und es müsste daher nach dem Früheren, wenn die Differentialgleichung zweiter Ordnung kein algebraisches Integral besitzt, noch ein zweites Integral derselben existiren, welches auch einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung angehört, das aber nach dem Obigen für die Differentialgleichung (125.) gegen die Voraussetzung ein zweites algebraisches Integral liefern würde; aber die Gleichung (94.) kann dann auch nur *ein* algebraisches Integral besitzen, weil sonst nach (124.) auch die Differentialgleichung (125.) mehr als ein algebraisches Integral haben müsste.

**) Dass die Differentialgleichung (125.), wenn sie drei algebraische Integrale besitzt, überhaupt nur algebraische Integrale haben kann, geht daraus hervor, dass, wenn drei ihrer Integrale mit t_1, t_2, t_3 bezeichnet werden, ihr allgemeines Integral sich bekanntlich in der Form

$$t = \frac{c_3 t_1(t_2 - t_3) + c t_2(t_3 - t_1)}{c_3(t_2 - t_3) + c(t_3 - t_1)}$$

darstellen lässt, worin c_3 eine bestimmte, c eine willkürliche Constante bedeutet.

besitzt, oder dass zwei und nur zwei Fundamentalintegrale derselben mit Adjungirung jener Grössen gleichartigen linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen, oder dass endlich alle ihre Integrale Differentialgleichungen der letztgenannten Art angehören.

Wir wollen uns nun die Frage vorlegen, ob auf Grund dieser Sätze die Eigenschaft und Form der algebraischen Beziehungen angegeben werden kann, welche für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung in der reducirten Form

$$(126.) \qquad y''' = p_2 y' + p_3 y$$

zwischen der unabhängigen Variabeln x, drei Fundamentalintegralen y_1, y_2, y_3 und deren Ableitungen stattfinden.

Habe die aus (126.) durch die Substitution

$$(127.) \qquad y = y_1 \int z y_1^{-\frac{3}{2}} dx$$

hergeleitete Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(128.) \qquad z'' = (\tfrac{3}{4} y_1^{-2} y_1'^2 - \tfrac{3}{2} y_1^{-1} y_1'' + p_2) z$$

I. ein algebraisches Integral

$$(129.) \qquad z_2 = f(x, y_1, y_1', y_1''),$$

so kann zunächst die Form von f näher bestimmt werden; denn wendet man auf (126.), wenn η_1 irgend ein von y_1 verschiedenes Integral dieser Differentialgleichung bedeutet, die Substitution

$$(130.) \qquad y = \eta_1 \int t \eta_1^{-\frac{3}{2}} dx$$

an, so erhält man die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(131.) \qquad t'' = (\tfrac{3}{4} \eta_1^{-2} \eta_1'^2 - \tfrac{3}{2} \eta_1^{-1} \eta_1'' + p_2) t,$$

und es ist leicht einzusehen, dass auch diese ein algebraisches Integral und zwar in der Form

$$(132.) \qquad t_2 = f(x, \eta_1, \eta_1', \eta_1'')$$

besitzen muss. Denn setzt man (129.) in (128.) ein, so ergiebt sich mit Benutzung von (126.) eine algebraische Differentialgleichung zweiter Ordnung in y_1, welche, wenn (126.) als irreductibel vorausgesetzt wird, identisch sein muss, also auch bestehen wird, wenn y_1 durch η_1 ersetzt wird, das heisst aber nichts anderes, als dass (132.) auch ein Integral von (131.) ist. Sei nun jetzt $\eta_1 = \mu y_1$, worin μ eine willkürliche Constante bedeutet, so wird,

wenn y in den Substitutionsgleichungen (127.) und (130.) dasselbe bedeutet,

$$(133.) \quad y_1 \int z y_1^{-\frac{3}{2}} dx = \mu y_1 \int t \mu^{-\frac{3}{2}} y_1^{-\frac{3}{2}} dx, \quad \text{also} \quad t = \mu^{\frac{1}{2}} z$$

sein; da aber die Differentialgleichung (131.) in

$$(134.) \quad t'' = (\tfrac{3}{4} y_1^{-2} y_1'^2 - \tfrac{3}{2} y_1^{-1} y_1'' + p_2) t$$

übergeht, diese also nach (128.) und (129.) das algebraische Integral besitzt

$$(135.) \quad t_1 = f(x, y_1, y_1', y_1''),$$

das Integral (132.) aber in

$$(136.) \quad t_2 = f(x, \mu y_1, \mu y_1', \mu y_1'')$$

übergeht, so wird

$$(137.) \quad f(x, \mu y_1, \mu y_1', \mu y_1'') = C.f(x, y_1, y_1', y_1'')$$

sein, woraus, da diese Relation wieder eine identische sein muss, folgt, dass $f(x, y_1, y_1', y_1'')$ eine homogene Function von y_1, y_1', y_1'' sein wird, und somit gesetzt werden darf

$$(138.) \quad f(x, y_1, y_1', y_1'') = y_1^r F\Big(x, \frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}\Big),$$

so dass sich

$$(139.) \quad z_2 = y_1^r F\Big(x, \frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}\Big)$$

und das entsprechende Integral y_2 der Differentialgleichung (126.) in der Form ergiebt

$$(140.) \quad y_2 = y_1 \int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx = y_1 \int y_1^{\varrho} F\Big(x, \frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}\Big) dx.$$

Durch Einsetzen von y_2 in Gleichung (126.) erhält man leicht

$$y_1^2 F'' + (2\varrho+3) y_1 y_1' F' + [(\varrho+3) y_1 y_1'' + \varrho(\varrho+2) y_1'^2 - p_2 y_1^2] F = 0,$$

und diese Gleichung wird, wenn wir die Annahme machen, dass die vorgelegte Differentialgleichung dritter Ordnung mit Adjungirung algebraischer Functionen von x irreductibel sei, eine identische sein müssen. Daraus ergiebt sich aber, dass, wenn wir mit η_1 irgend ein Integral der Differentialgleichung (126.) bezeichnen, der Ausdruck

$$\eta_2 = \eta_1 \int \eta_1^{\varrho} F\Big(x, \frac{\eta_1'}{\eta_1}, \frac{\eta_1''}{\eta_1}\Big) dx$$

auch stets ein Integral derselben Differentialgleichung sein wird, oder dass, wenn man in die Gleichung

$$(141.) \quad \eta_1 \eta_2' - \eta_2 \eta_1' = \eta_1^{\varrho+2} F\Big(x, \frac{\eta_1'}{\eta_1}, \frac{\eta_1''}{\eta_1}\Big)$$

$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3$ statt η_1 setzt, worin μ_1, μ_2, μ_3 willkürliche Constanten bedeuten, für η_2 ein Integralwerth in der Form $m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$ zu substituiren sein wird, worin m_1, m_2, m_3 in bestimmter Weise von μ_1, μ_2, μ_3 abhängen.

Setzt man nun in (141.) y_1, y_2, y_3 statt η_1, so erhält man, wenn für η_2 die entsprechenden Werthe in der Form $m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3$ substituirt werden, drei von einander unabhängige algebraische Beziehungen von y_1, y_1', y_1'' von der Form

$$(142.)\quad \begin{cases} m_{12}(y_1y_2'-y_2y_1')+m_{13}(y_1y_3'-y_3y_1') = y_1^{\varrho+2}F\left(x, \frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}\right), \\ m_{23}(y_2y_3'-y_3y_2')+m_{21}(y_2y_1'-y_1y_2') = y_2^{\varrho+2}F\left(x, \frac{y_2'}{y_2}, \frac{y_2''}{y_2}\right), \\ m_{31}(y_3y_1'-y_1y_3')+m_{32}(y_3y_2'-y_2y_3') = y_3^{\varrho+2}F\left(x, \frac{y_3'}{y_3}, \frac{y_3''}{y_3}\right), \end{cases}$$

welche die Beziehungen zwischen den 3 Fundamentalintegralen und deren Ableitungen liefern, und aus denen man, wenn man sie mit ihren drei Differentialien zusammenstellt, deren Form

$$(143.)\quad \begin{cases} m_{12}(y_1y_2''-y_2y_1'')+m_{13}(y_1y_3''-y_3y_1'') \\ = (\varrho+2)y_1^{\varrho+1}y_1'F\left(x, \frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}\right)+y_1^{\varrho+2}\frac{dF\left(x, \frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}\right)}{dx}, \\ m_{23}(y_2y_3''-y_3y_2'')+m_{21}(y_2y_1''-y_1y_2'') \\ = (\varrho+2)y_2^{\varrho+1}y_2'F\left(x, \frac{y_2'}{y_2}, \frac{y_2''}{y_2}\right)+y_2^{\varrho+2}\frac{dF\left(x, \frac{y_2'}{y_2}, \frac{y_2''}{y_2}\right)}{dx}, \\ m_{31}(y_3y_1''-y_1y_3'')+m_{32}(y_3y_2''-y_2y_3'') \\ = (\varrho+2)y^{\varrho+1}_3y_3'F\left(x, \frac{y_3'}{y_3}, \frac{y_3''}{y_3}\right)+y_3^{\varrho+2}\frac{dF\left(x, \frac{y_3'}{y_3}, \frac{y_3''}{y_3}\right)}{dx} \end{cases}$$

ist, leicht die Relationen herleitet:

$$(144.)\quad \begin{cases} y_1' = F_{11}(x, y_1, y_2, y_3), \quad y_2' = F_{21}(x, y_1, y_2, y_3), \quad y_3' = F_{31}(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_1'' = F_{12}(x, y_1, y_2, y_3), \quad y_2'' = F_{22}(x, y_1, y_2, y_3), \quad y_3'' = F_{32}(x, y_1, y_2, y_3), \end{cases}$$

und wir finden somit,

dass, wenn die reducirte Differentialgleichung zweiter Ordnung (128.) *der irreductibeln Differentialgleichung dritter Ordnung* (126.) *ein mit Adjungirung von x, eines Integrales der letzteren Differentialgleichung und dessen Ableitungen algebraisches Integral besitzt, die Ableitungen dreier Fundamentalintegrale sich als algebraische Functionen eben dieser drei Integrale ausdrücken lassen.*

Bildet man aus

$$y_1' = F_{11}(x, y_1, y_2, y_3), \quad y_1'' = F_{12}(x, y_1, y_2, y_3)$$

durch Elimination von y_3 die Beziehung

$$(145.) \quad y_2 = F(x, y_1, y_1', y_1''),$$

wonach sich also auch die zu y_1 ***gehörigen Fundamentalintegrale als algebraische Functionen von*** y_1 ***und dessen Ableitungen ausdrücken lassen,*** so erhalten wir, da die Differentialgleichung (126.) als irreductibel vorausgesetzt war, nach den im Anfange der Arbeit ausgesprochenen Sätzen entweder für die 3 Fundamentalintegrale die eine Gruppe von drei Elementen

$$(\alpha.) \quad y_1, \quad F(x, y_1, y_1', y_1''), \quad F^2(x, y_1, y_1', y_1'')$$

oder die zwei Gruppen von je zwei Elementen

$$(\beta.) \quad \begin{cases} y_1, & F(x, y_1, y_1', y_1''), \\ y_3, & F(x, y_3, y_3', y_3''), \end{cases}$$

worin für den ersten Fall ($\alpha.$) die nochmals iterirte Function

$$(146.) \quad F^3(x, y_1, y_1', y_1'') = m_1 y_1 + m_2 F(x, y_1, y_1', y_1'') + m_3 F^2(x, y_1, y_1', y_1'')$$

sein muss, während für ($\beta.$) einerseits

$$(147.) \quad F^2(x, y_1, y_1', y_1'') = m_1 y_1 + m_2 F(x, y_1, y_1', y_1''),$$

andererseits

$$(148.) \quad F(x, y_3, y_3', y_3'') = \mu_1 y_1 + \mu_2 F(x, y_1, y_1', y_1'') + \mu_3 y_3$$

sein wird.

Wie im gegebenen Falle die Möglichkeit derartiger Gruppen für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung zu untersuchen ist, wurde oben in einzelnen Beispielen ausgeführt.

Besitze die Differentialgleichung (128.)

II. zwei und nur zwei Integrale, welche zugleich linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen, und sei eine solche

$$(149.) \quad z' = \omega_2(x, y_1, y_1', y_1'')z,$$

welche das Integral z_2 mit (128.) gemein haben mag, so wird, wenn wir wieder das der Substitution (127.) gemäss entsprechende Integral der Differentialgleichung (126.) mit y_2 bezeichnen, also

$$y_2 = y_1 \int z_2 y_1^{-\frac{3}{2}} dx$$

setzen, aus

$$y_1^{\frac{1}{2}} z_2 = y_1 y_2' - y_2 y_1', \quad y_1^{\frac{1}{2}} z_2' = (y_1 y_2'' - y_2 y_1'') - \tfrac{1}{2} y_1^{-1} y_1' (y_1 y_2' - y_2 y_1')$$

vermöge (149.)

$$(150.) \quad y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = (\omega_2(x, y_1, y_1', y_1'') + \tfrac{1}{2} y_1^{-1} y_1')(y_1 y_2' - y_2 y_1')$$

folgen, und da noch ein Integral z_3 der Differentialgleichung (128.) existirt,

welches einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$z' = \omega_3(x, y_1, y_1', y_1'')z$$

genügt, und für welches das entsprechende Integral der Gleichung (126.) mit y_3 bezeichnet werden mag, so wird man analog eine zweite Beziehung

$$(151.) \quad y_1y_3''-y_3y_1'' = (\omega_3(x, y_1, y_1', y_1'')+\tfrac{1}{2}y_1^{-1}y_1')(y_1y_3'-y_3y_1')$$

erhalten und endlich, wenn man beachtet, dass durch Differentiation von (150.) mit Benutzung von (126.)

$$(152.) \quad y_1'y_2''-y_2'y_1'' = \omega_1(x, y_1, y_1', y_1'')(y_1y_2'-y_2y_1')$$

folgt, worin ω_1 eine algebraische Function bedeutet, durch Zusammenstellung von (150.), (151.) und (152) mit

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \\ y_3 & y_3' & y_3'' \end{vmatrix} = a$$

die nachfolgende Beziehung zwischen den drei Fundamentalintegralen y_1, y_2, y_3:

$$(153.) \quad y_3f_1(x, y_1, y_1', y_1')+y_3'f_2(x, y_1, y_1', y_1'')+y_3'' = \frac{a}{y_1y_2'-y_2y_1'}.$$

Da aber alle Relationen zwischen drei Fundamentalintegralen y_1, y_2, y_3 und deren Ableitungen für die Differentialgleichung (126.) Beziehungen zwischen den Fundamentalintegralen der Differentialgleichung (128.) hervorrufen mussten, deren einfachste Formen durch die Gleichungen

$$(154.) \quad z_2' = \omega_2(x, y_1, y_1', y_1'')z_2, \quad z_3' = \omega_3(x, y_1, y_1', y_1'')z_3$$

dargestellt sind, *so sind auch oben durch die Beziehungen* (150.) *und* (151.) *die für den Fall II. geltenden einfachsten allgemeinen Relationen gefunden.* Jedes andere Integral der Differentialgleichung (128.) genügt, wie wir bewiesen haben, einer linearen *nicht* homogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(155.) \quad z' = \Omega(x, y_1, y_1', y_1'')z+\Omega_1(x, y_1, y_1', y_1''),$$

so dass die entsprechenden Relationen zwischen den Integralen der Differentialgleichung (128.), wenn wir das dem Integrale Z von (155.) vermöge der Substitution (127.) entsprechende Integral mit Y bezeichnen,

$$y_1Y''-Yy_1'' = (\Omega(x, y_1, y_1', y_1'')+\tfrac{1}{2}y_1^{-1}y_1')(y_1Y'-Yy_1')+y_1^{\frac{1}{2}}\Omega_1(x, y_1, y_1', y_1'')$$

lautet, worin Ω und Ω_1 wiederum algebraische Functionen bedeuten.

Es mag noch in Betreff der Functionen ω_2 und ω_3 bemerkt werden, dass, weil

$$z_2' = \omega_2(x, y_1, y_1', y_1'')z_2,$$

$$z_2'' = \left\{\omega_2(x, y_1, y_1', y_1'')^2 + \frac{\partial\omega_2}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y_1}y_1' + \frac{\partial\omega_2}{\partial y_1'}y_1'' + \frac{\partial\omega_2}{\partial y_1''}(p_2y_1' + p_3y_1)\right\}z_2$$

ist, nach (128.) die algebraische Function ω_2 der Gleichung genügen muss

(156.) $$\omega_2^2 + \frac{\partial\omega_2}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y_1}y_1' + \frac{\partial\omega_2}{\partial y_1'}y_1'' + \frac{\partial\omega_2}{\partial y_1''}(p_2y_1' + p_3y_1) = \tfrac{3}{4}y_1^{-2}y_1''^2 - \tfrac{3}{2}y_1^{-1}y_1'' + p_2;$$

da aber die Gleichung (126.) eine irreductible sein sollte, so muss die Gleichung (156.) eine identische sein, d. h. $\omega_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ muss ein algebraisches Integral der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sein:

$$\omega^2 + \frac{\partial\omega}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\omega}{\partial\xi_2}\xi_3 + \frac{\partial\omega}{\partial\xi_3}\xi_4 + \frac{\partial\omega}{\partial\xi_4}(p_2\xi_3 + p_3\xi_2) = \tfrac{3}{4}\xi_2^{-2}\xi_3^2 - \tfrac{3}{2}\xi_2^{-1}\xi_4 + p_2.$$

Da endlich auf die Function $\omega_2(x, y_1, y_1', y_1'')$ der Gleichung (149.) dieselben Schlüsse angewandt werden können wie auf die Function $f(x, y_1, y_1', y_1'')$ der Gleichung (129.), so folgt, dass die allgemeine Form der Beziehung zwischen den beiden Fundamentalintegralen der Differentialgleichung dritter Ordnung, wie sie die Gleichung (150.) darstellt, in

(157.) $$y_1y_2'' - y_2y_1'' = \left(y_1^{\varrho}\Omega\left(x, \frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}\right) + \tfrac{1}{2}y_1^{-1}y_1'\right)(y_1y_2' - y_2y_1')$$

übergeht; setzt man aber für diese Form von ω_2 den Ausdruck (149.) in (128.) ein, so findet man leicht, dass, weil die Beziehung unverändert bleiben muss, wenn y_1 durch μy_1 ersetzt wird, $\varrho = 0$ folgt, und dass somit die allgemeine Form der Beziehungen zwischen den drei Integralen und deren Ableitungen lautet:

(158.) $$y_1y_2'' - y_2y_1'' = F_1\left(x, \frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}\right)(y_1y_2' - y_2y_1')$$

und

(159.) $$y_1y_3'' - y_3y_1'' = F_2\left(x, \frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}\right)(y_1y_3' - y_3y_1').$$

Was nun schliesslich den Fall betrifft, in welchem

III. die Differentialgleichung (128.) nur Integrale besitzt, welche zugleich linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen,

so werden nach dem Vorigen alle Relationen zwischen drei Integralen und deren Ableitungen die Form (150.) *oder* (158.), (159.) *haben oder algebraisch aus diesen Formen zusammengesetzt sein.*

Heidelberg, im October 1887.

Untersuchungen aus der Theorie der Substitutionen-Gruppen.

(Von Herrn *Eugen Netto* in Giessen.)

Herr *Frobenius* hat im 101. Bande dieses Journals einen Aufsatz unter dem Titel: „Ueber die Congruenz nach einem, aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul“ veröffentlicht, in welchem er eine Reihe sehr interessanter Resultate abgeleitet hat. Die Formel, welche den Mittelpunkt der Arbeit bildet, ist eine bedeutsame Verallgemeinerung einer früher von mir aufgestellten. Es ist mir nun gelungen, auch meinerseits die Resultate der obigen Arbeit weiterzuführen; und dies ist der Inhalt der vorliegenden Abhandlung. Im vierten Paragraphen seiner Arbeit zeigt Herr *Frobenius,* dass in jeder transitiven Gruppe die Anzahl der Elemente, die in den einzelnen Substitutionen ungeändert bleiben, der Ordnung der Gruppe gleich sei. Fasst man ein solches Element als einen Cykel erster Ordnung auf, dann liegt die Frage nahe, ob für Cykel höherer Ordnung ein ähnlicher Satz gelte. Diese Frage kann bejaht werden; der Satz § 1, II. zeigt, dass ein dem obigen genau entsprechendes Theorem besteht; auch dieses lässt sich noch weiter ausdehnen (§ 2), so dass es sich auf die Anzahl des Vorkommens aller einander ähnlichen Substitutionen beliebiger Art in einer Gruppe bezieht. An die so erlangten Resultate werden Betrachtungen angeknüpft, die denen des Herrn *Frobenius* zum Theil parallel laufen, zum Theil neue Bahnen betreten (§ 3 und § 4).

Die letzten Paragraphen der Arbeit beschäftigen sich mit Untersuchungen über die Gruppen, deren Ordnung die Potenz einer Primzahl p ist. Sie beziehen sich der Hauptsache nach auf ihre Nicht-Primitivität, sowie auf ihre Untergruppen.

§ 1.

Die Substitutionengruppe H der n Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$ möge von der Ordnung h sein; ihre Substitutionen können wir auf folgende Art in

eine Tabelle einordnen (vgl. meine Substitutionentheorie § 62). Wir greifen k Elemente $x_1, x_2, \ldots x_k$ aus den n Elementen von H beliebig heraus und schreiben alle diejenigen Substitutionen von H in dieselbe Zeile der Tabelle, welche $x_1, x_2, \ldots x_k$ durch denselben Complex $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_k}$ in derselben Reihenfolge ersetzen, also alle Substitutionen, welche die k Folgen $x_1 x_{i_1}$, $x_2 x_{i_2}, \ldots x_k x_{i_k}$ enthalten. Ferner sei H' diejenige Untergruppe von H, welche alle Substitutionen von H enthält, durch welche die Elemente x_1, $x_2, \ldots x_k$ nicht versetzt werden; h' sei die Ordnung von H', und mit $t_1 = 1$, $t_2, t_3, \ldots t_{h'}$ bezeichnen wir ihre Substitutionen. Ist nun s_α eine beliebige Substitution von H, so gehören alle

$$s_\alpha, \quad t_2 s_\alpha, \quad t_3 s_\alpha, \quad \ldots \quad t_{h'} s_\alpha$$

und nur sie in eine Zeile der Tabelle, und diese selbst nimmt also die Form an:

$$(T.) \quad \begin{cases} 1, & t_2, & t_3, & \ldots & t_{h'}, \\ s_2, & t_2 s_2, & t_3 s_2, & \ldots & t_{h'} s_2, \\ s_3, & t_2 s_3, & t_3 s_3, & \ldots & t_{h'} s_3, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_\mu, & t_2 s_\mu, & t_3 s_\mu, & \ldots & t_{h'} s_\mu. \end{cases} \qquad (\mu h' = h)$$

Es sei jetzt v_1 eine Substitution von H, welche unter ihren Cyklen einen solchen $k$ter Ordnung, etwa

$$(1.) \qquad \varpi_1 = (x_1 x_2 \ldots x_k)$$

enthält. Dann werden die von einander verschiedenen Substitutionen

$$(2.) \qquad v_1, \quad t_2 v_1, \quad t_3 v_1, \quad \ldots \quad t_{h'} v_1$$

sämmtlich denselben Cyklus (1.) umschliessen, und von allen Substitutionen der Gruppe H auch nur sie. Transformirt man nun v_1 durch s_α aus der αten Zeile von $(T.)$, so enthält diese Transformirte $v_\alpha = s_\alpha^{-1} v_1 s_\alpha$ den Cyklus

$$(1^a.) \qquad \varpi_\alpha = (x_{a_1} x_{a_2} \ldots x_{a_k}).$$

Wir können alle Substitutionen von H, welche ϖ_α einschliessen, auf doppelte Art erlangen. Einmal transformiren wir alle Substitutionen von (2.) durch ein $t_\lambda s_\alpha$; die Resultate sind von einander verschieden, sie enthalten $(1^a.)$ und sind die einzigen dieser Art, da man von ihnen auf dem umgekehrten Wege zu (2.) zurückgelangen muss. — Zweitens kann man, wenn wir die Substitutionen von H, welche $x_{a_1}, \ldots x_{a_n}$ nicht umsetzen, also diejenigen der Gruppe

$$(t_\lambda s_\alpha)^{-1} H' (t_\lambda s_\alpha) = s_\alpha^{-1} H' s_\alpha = H_\alpha \quad \text{mit} \quad 1, \quad t_2^{(\alpha)}, \quad t_3^{(\alpha)}, \quad \ldots \quad t_{h'}^{(\alpha)}$$

bezeichnen, durch rechtsseitige Multiplication mit v_α die Zeile bilden

$$(3.) \qquad v_\alpha, \quad t_2^{(\alpha)} v_\alpha, \quad t_3^{(\alpha)} v_\alpha, \quad \ldots \quad t_{h'}^{(\alpha)} v_\alpha,$$

und diese enthält dann ebenfalls alle Substitutionen mit ϖ_α. Daraus erkennt man, dass die Transformation von (2.) mit jedem $t_\lambda s_\alpha$ $(\lambda = 1, 2, \ldots h')$ auf (3.) führt. Bewirkt man also die Transformation von (2.) durch alle $h = h'\mu$ Substitutionen von H, so erhält man doch nur μ Zeilen, nämlich:

$$(T_0.) \quad \begin{cases} v_1, & t_2 v_1, & t_3 v_1, & \ldots & t_{h'} v_1, \\ v_2, & t_2^{(2)} v_2, & t_3^{(2)} v_2, & \ldots & t_{h'}^{(2)} v_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_\mu, & t_2^{(\mu)} v_\mu, & t_3^{(\mu)} v_\mu, & \ldots & t_{h'}^{(\mu)} v_\mu, \end{cases}$$

derart, dass alle Substitutionen derselben Zeile den gleichen aus (1.) durch Transformation erhaltenen Cyklus besitzen. Es fragt sich hierbei nun, wie oft z. B. der Cyklus (1.) durch die Substitutionen von H in sich selbst transformirt wird. Ruft ein $t_\lambda s_\beta$ solche Transformation hervor, so darf s_β die Elemente $x_1, x_2, \ldots x_k$ nur cyklisch verschieben; s_β muss somit eine Potenz von (1.) als Cyklus enthalten. Folglich rufen die Substitutionen $v_1, v_1^2, v_1^3, \ldots v_1^{k-1}$ das Gewünschte hervor, und die Substitutionen

$$t_\lambda v_1^\alpha \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots h';\ \alpha = 0, 1, \ldots k-1)$$

sind die einzigen aus (T.), welche dies thun. Es werden also die aus der ersten Zeile durch Transformation mit $1, v_1, v_1^2, \ldots v_1^{k-1}$ entstehenden k Zeilen von $(T_0.)$ unter einander identisch sein, und ebenso je k Zeilen. Das ergiebt:

I. *Aus jedem einzelnen in* (2.), *und sonach in H überhaupt vorkommenden Cyklus* $(x_1 x_2 \ldots x_k)$ *können durch Transformation mit allen h Substitutionen von H je* $\frac{\mu}{k}$ *Cykel, aus allen h' vorhandenen also* $\frac{\mu . h'}{k} = \frac{h}{k}$ *Cykel abgeleitet werden. Die Anzahl der in diese Cykel eingehenden Stellen ist folglich gleich h, d. h. gleich der Ordnung der Gruppe H.*

In den Substitutionen von $(T_0.)$ tritt jedes ϖ_1 auf, welches überhaupt in H vorkommt, und ebenso jedes ϖ_α, welches aus ϖ_1 durch Transformation mittels Substitutionen von H erlangt werden kann. Ist H mindestens k-fach transitiv, dann kommen in $(T_0.)$ alle Cykel $k$ter Ordnung in angegebener Weise vor. Ist H weniger oft transitiv, dann giebt es andere $\varpi_1', \ldots$ die nicht in $(T_0.)$ aufzutreten brauchen; diese geben dann Veranlassung zu gleichen Tabellenbildungen.

Rechnen wir also zu der *Klasse des Cykels* ϖ alle diejenigen Cykel,

welche aus ϖ durch Transformation mit den Substitutionen von H hervorgehen, und bezeichnen mit $m_1^{(k)}$ die Anzahl der Klassen, in welche die Cykel $k$ter Ordnung aus H zerfallen, dann sind $m_1^{(k)}$ Tabellen der Form $(T_0.)$ nothwendig und hinreichend, um alle Cykel aufzunehmen; bedeutet ferner $h_\lambda^{(k)}$ die Anzahl derjenigen Substitutionen von H, welche genau λ Cykel $k$ter Ordnung einschliessen, so folgt:

II. *Das k-fache der Anzahl aller Cykel kter Ordnung, die in einer beliebigen Gruppe H vorkommen, und also die Anzahl der Stellen, welche diese Cykel in sich schliessen, ist ein Vielfaches der Ordnung h der Gruppe, und zwar ist*

$$(4.) \qquad k\sum_\lambda \lambda h_\lambda^{(k)} = m_1^{(k)}.h.$$

Ist H mindestens k-fach transitiv, dann ist $m_1^{(k)} = 1$.

Diese letzte Bedingung ist hinreichend aber nicht nothwendig. Wird $k = n$ genommen, dann ist $G' = 1$, $h' = 1$, $\mu = h$, und so folgt der Satz:

III. *Enthält H eine cyklische Substitution der Ordnung n, so kann dieselbe durch die Substitutionen von H in genau h:n von einander verschiedene Substitutionen transformirt werden.*

§ 2.

Wir wollen die bisherigen Betrachtungen jetzt in der Weise verallgemeinern, dass wir unter ϖ_1 eine beliebige Zusammenstellung einzelner aus $x_1, x_2, \ldots x_n$ gebildeten Cyklen, d. h. also eine aus den Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gebildete Substitution verstehen. ϖ_1 möge seine k Elemente in α Cyklen von je a Elementen, β Cyklen von je b Elementen u. s. f. enthalten, wobei $a, b, \ldots$ hier und im Folgenden von einander verschieden sein sollen, und

$$\alpha a + \beta b + \cdots = k$$

sein muss. Dann sind ganz ähnliche Schlussfolgerungen wie oben möglich: Enthält die Substitution v_1 aus H die Cykelzusammenstellung ϖ_1 als Theil in sich, dann findet dasselbe bei jeder der Substitutionen von (2.) statt und nur bei ihnen. Ebenso kommt die Transformirte ϖ_α nur in (3.) vor. Von den μ Zeilen von $(T_0.)$ werden je so viele unter einander übereinstimmen, als in $1, s_2, s_3, \ldots s_\mu$ aus $(T.)$ Substitutionen vorkommen, welche ϖ_1 in sich selbst transformiren. Auch die Bestimmung dieser Zahl entspricht den obigen Betrachtungen. Bezeichnet man mit h'' die Ordnung derjenigen Untergruppe H'' von H, welche ϖ_1 in sich selber transformirt, dann vertheilen sich die h'' Substitutionen von H'' in $h^{(0)} = h'' : h'$ Zeilen von $(T.)$, und es

werden $h^{(0)}$ unter den Substitutionen 1, s_2, ... s_μ das ϖ_1 in sich selbst transformiren; also stimmen je $h^{(0)}$ Zeilen von $(T_0.)$ mit einander überein.

Demnach giebt es in H genau $\frac{\mu h'}{h^{(0)}} = \frac{h}{h^{(0)}}$ Substitutionen, welche eine dem ϖ_1 ähnliche, und durch Transformation mit Substitutionen von H aus ϖ_1 ableitbare Cykelzusammenstellung ϖ_α enthalten.

Falls in $\alpha a + \beta b + \cdots = k$ die Zahlen α, β, ... sämmtlich den Werth 1, und $a, b; a, c;$ ... keinen gemeinsamen Theiler haben, ist $h_0 = ab\ldots$; denn nur diejenigen Substitutionen können ϖ_1 in sich transformiren, welche jeden einzelnen Cyklus in sich umwandeln.

Definiren wir dann wie oben den Begriff der *Klasse einer Cykelzusammenstellung* ϖ_1 und bezeichnen mit $m_1^{(\varpi)}$ die Zahl derselben für H, dann folgt:

IV. *Bedeutet ϖ_1 eine Substitution von k Elementen, welche je einen Cyklus von $a, b, c, \ldots$ Elementen besitzt, wobei je zwei dieser Zahlen theilerfremd sind, dann ist*

$$(5.) \qquad a.b.c\ldots \sum_\lambda \lambda . h_\lambda^{(\varpi)} = m_1^{(\varpi)} . h.$$

Hier bezeichnet $h_\lambda^{(\varpi)}$ die Anzahl der Substitutionen von H, welche genau λ Cykelzusammenstellungen der Form ϖ besitzen.

Sind aber diese Bedingungen nicht erfüllt, dann kann man nur ein Vielfaches von $h^{(0)}$ angeben. Verstehen wir nämlich unter $\mathfrak{H}$ diejenige Gruppe des Grades k von x_1, x_2, ... x_k, welche alle Substitutionen umfasst, die ϖ_1 in sich selbst transformiren, dann ist deren Ordnung bekanntlich

$$\mathfrak{r} = \alpha! a^\alpha . \beta! b^\beta . \gamma! c^\gamma \ldots;$$

ferner ist $\mathfrak{r}.h'$ die Ordnung der aus $\mathfrak{H}$ und H' zusammengesetzten Gruppe, und da H'' in dieser enthalten ist, so wird h'' ein Theiler von $\mathfrak{r}h'$, und $h^{(0)} = \frac{h''}{h'}$ ein Theiler von $\mathfrak{r}$ werden.

Für die einzelnen Tabellen der Form $(T_0.)$ brauchen die zugehörigen Werthe von $h^{(0)}$ nicht alle einander gleich zu sein. Gehen wir aber zu dem Multiplum $\mathfrak{r}$ über, so ist dies für jede der Tabellen dasselbe. Dann ist die Anzahl der zu einer Tabelle $(T_0.)$ gehörigen, durch Transformation aus einander ableitbaren, und also eine *Klasse* constituirenden ϖ_α mit $\mathfrak{r}$ multiplicirt nicht direct gleich h, sondern nur noch ein Vielfaches von h. Hieraus folgt die Erweiterung des Satzes IV. in der Form:

IV^a. *Bedeutet $\varpi(x_1, x_2, \ldots x_k)$ eine Substitution der k Elemente x_1, x_2, ... x_k, welche α Cykel von je a Elementen, β Cykel von je b Ele-*

menten u. s. f. besitzt, und bezeichnet man mit $h_\lambda^{(\varpi)}$ die Anzahl derjenigen Substitutionen von H, welche genau λ Cykelzusammenstellungen der Form ϖ besitzen, dann ist

$$(5^a.) \qquad \alpha!a^\alpha.\beta!b^\beta\ldots\sum_\lambda \lambda h_\lambda^{(\varpi)}$$

ein Vielfaches der Ordnung h der Gruppe H.

Wird H die symmetrische Gruppe, dann existirt für ϖ nur eine einzige Klasse, also auch nur eine einzige Tabelle $(T_0.)$. Ferner werden in diesem Falle H'' und $\{\mathfrak{H}, H'\}$ mit einander identisch, und also $h^{(\omega)} = 1$. Folglich erhält man:

IV^b. ***Ist H die symmetrische Gruppe, dann wird unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen***

$$(5^b.) \qquad \alpha!a^\alpha.\beta!b^\beta\ldots\sum_\lambda \lambda h_\lambda^{(\varpi)} = h.$$

Hinsichtlich der Abzählung der $h_\lambda^{(\varpi)}$ mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass, wenn eine Substitution von H unter ihren Cyklen $\alpha_1 \geqq \alpha$ der Ordnung a, ferner $\beta_1 \geqq \beta$ der Ordnung b, u. s. w. enthält, dass sie dann betrachtet werden muss als eine solche, welche $\binom{\alpha_1}{\alpha}\cdot\binom{\beta_1}{\beta}\cdots$ dem ϖ ähnliche Cykelzusammenstellungen enthält. Denn auf so viele verschiedene Arten lassen sich in ihr α Cykel der Ordnung a mit β der Ordnung b u. s. f. zusammenfügen. Diese Substitution ist folglich demjenigen $h_\lambda^{(\varpi)}$ beizuzählen, für welches $\lambda = \binom{\alpha_1}{\alpha}\cdot\binom{\beta_1}{\beta}\cdots$ ist.

Der folgende Satz ist also für $\alpha = \mu$, $a = k$; $\beta = 1$, $b = 1$; ... unter IV^a. enthalten:

IV^c. ***Bezeichnet $h_\lambda^{(k)}$ die Anzahl derjenigen Substitutionen in H, welche genau λ Cykel der Ordnung k enthalten, dann ist***

$$(5^c.) \qquad k^\mu \sum_\lambda \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-\mu+1).h_\lambda^{(k)}$$

ein Vielfaches der Ordnung h der Gruppe H.

Endlich erwähnen wir noch einen Specialfall von IV^a.

IV^d. ***Besitzt H genau C_k cyklische Substitutionen $k$ter Ordnung, dann ist***

$$k.(n-k)!C_k$$

ein Vielfaches der Ordnung h der Gruppe H.

Man kommt hierzu, wenn man in IV^a. setzt

$$\varpi_1 = (x_1x_2\ldots x_k)(x_{k+1})(x_{k+2})\ldots(x_n).$$

§. 3.

Der Satz II. erweist sich als eine Verallgemeinerung des von Herrn ***Frobenius*** in seiner angegebenen Arbeit § 4, II. S. 287 aufgestellten Theorems, so dass die dort gegebene Formel (2.) unserer Formel (4.) entspricht. Auch für die übrigen dort abgeleiteten Formeln ergeben sich hier Verallgemeinerungen. So ist zunächst, wie man unmittelbar sieht:

$$(6.) \qquad \Sigma h_\lambda^{(k)} = m_0^{(k)} h \qquad (m_0^{(k)} = 1).$$

Ferner liefert der Satz IV^c. für $\mu = 1, 2, 3, \ldots$

$$(4.) \qquad k \Sigma \lambda h_\lambda^{(k)} = m_1^{(k)}.h,$$

$$(7.) \qquad k^2 \Sigma \lambda(\lambda-1).h_\lambda^{(k)} = m_2^{(k)}.h,$$

$$(8.) \qquad k^3 \Sigma \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) h_\lambda^{(k)} = m_3^{(k)}.h,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hierbei bedeuten die Zahlen $m_1^{(k)}$, $m_2^{(k)}$, $m_3^{(k)}$, ... ganze Zahlen, die für den Fall, dass H die symmetrische Gruppe wird, sämmtlich den Werth 1 erhalten.

Die Umkehrung der letzten Formeln liefert

$$(9.) \qquad \frac{\lambda! h_\lambda^{(k)}}{h} = \frac{m_\lambda^{(k)}}{k^\lambda} - \frac{m_{\lambda+1}^{(k)}}{1! k^{\lambda+1}} + \frac{m_{\lambda+2}^{(k)}}{2! k^{\lambda+2}} - \cdots;$$

und an diese Ergebnisse lassen sich entsprechende Betrachtungen knüpfen, wie sie Herr ***Frobenius*** im sechsten Paragraphen seiner Arbeit angestellt hat. Wir nehmen auch hier, wie es dort geschehen ist, an, dass H die symmetrische Gruppe sei. Dann ist

$$(10.) \qquad h_0^{(k)} = n!\left(1 - \frac{1}{1!k} + \frac{1}{2!k^2} - \frac{1}{3!k^3} + \cdots\right);$$

das letzte Glied dieser Entwickelung hat den Nenner $E\left(\frac{n}{k}\right)! k^{E\left(\frac{n}{k}\right)}$. Nun sieht man leicht: einmal, dass dieser Nenner die Zahl k in derselben Potenz enthält wie $n!$, falls k eine Primzahl ist. Denn setzt man $E\left(\frac{n}{k}\right) = m$, so wird

$$\frac{1.2\ldots k}{k!1} \cdot \frac{(k+1)(k+2)\ldots(2k)}{k!2} \cdot \frac{(2k+1)\ldots(3k)}{k!3} \cdots \frac{((m-1)k+1)\ldots(mk)}{k!m} = \frac{(mk)!}{(k!)^m.m!}$$

eine ganze Zahl werden, die den Primfactor k nicht enthält, und folglich ist dasselbe mit $n! : [k^m.m!]$ der Fall. Andererseits sieht man, dass, wenn k keine Primzahl und von 4 verschieden ist, $(k-1)!$ durch k, und also auch $(mk)! : [k^m.m!]$ durch k theilbar sein wird. Endlich erkennt man, dass für $k = 4$ und $n > 5$ wiederum Theilbarkeit des betrachteten Quotienten durch $k = 4$ eintreten wird. Daraus folgt:

VI. ***Die Anzahl $h_0^{(k)}$ aller Substitutionen aus n Elementen, welche keinen Cyklus von k Elementen besitzen, ist nicht durch k theilbar, falls k eine Primzahl ist; dagegen ist diese Anzahl durch k theilbar, wenn k keine Primzahl ist. Eine Ausnahme bildet nur $k=4$; $n=4$; 5.***

Aehnliche Sätze gelten für $h_1^{(k)}$, $h_2^{(k)}$, ...

Vergleicht man die Formel (10.) mit der Entwickelung

$$\frac{n!}{e^{\frac{1}{k}}} = n!\left(1-\frac{1}{1!k}+\frac{1}{2!k^2}-\frac{1}{3!k^3}+\cdots\right),$$

so erkennt man, dass kein Analogon zu dem Satze des Herrn *Frobenius* § 6. I. besteht, weil die Differenz der rechten Seiten der beiden Gleichungen grösser als die Einheit werden kann.

Nimmt man dagegen den Quotienten aus (10.) und der Entwickelung von $e^{-\frac{1}{k}}$, so folgt, dass dieser sich mit wachsendem n bei constantem k dem Werthe $n!$ nähert. Also ergiebt sich zum Satze II. des Herrn *Frobenius* der entsprechende Satz in der folgenden Form:

VII. ***Das Verhältniss zwischen der Anzahl n! aller Substitutionen von n Elementen, und der Anzahl derjenigen unter ihnen, welche keinen Cyklus kter Ordnung besitzen, nähert sich mit wachsendem n der Grösse $e^{\frac{1}{k}}$.***

Aus der Formel (9.) ergiebt sich auch noch allgemeiner die Bestimmung derjenigen Substitutionen der symmetrischen Gruppe, welche genau λ Cykel der Ordnung k enthalten:

$$(11.)\qquad h_\lambda^{(k)} = \frac{n!}{\lambda!\,k^\lambda}\left(1-\frac{1}{1!k}+\frac{1}{2!k^2}-\frac{1}{3!k^3}+\cdots\right).$$

Die Anzahl der Summanden innerhalb der Klammer auf der rechten Seite der Formel ist $E\left(\frac{n}{k}\right)-\lambda+1$. Falls diese Zahl nun mit n gleichzeitig ins Unendliche wächst, nähert der Werth der Klammer sich der Grösse $e^{-\frac{1}{k}}$; dies geschieht also, sobald $\frac{n}{k}-\lambda$ mit n gleichzeitig über alle Grenzen wächst. Daraus folgt dann, wie soeben:

VIII. ***Das Verhältniss zwischen der Anzahl aller Substitutionen von n Elementen und der Anzahl derjenigen unter ihnen, welche genau λ Cykel der Ordnung k enthalten, nähert sich bei wachsendem n, falls $\frac{n}{k}-\lambda$ mit n gleichzeitig ins Unendliche geht, der Grösse $\lambda!\,k^\lambda e^{\frac{1}{k}}$.***

Das Verhältniss der Anzahl derjenigen Substitutionen von n Elementen, welche genau λ Cykel der Ordnung k enthalten, und derjenigen, welche deren μ(<λ) umschliessen, nähert sich unter derselben Voraussetzung der Grösse

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\mu+1)k^{\lambda-\mu}.$$

§ 4.

Weitere Resultate folgen durch die Betrachtung anderer, zu H isomorpher Gruppen. Wir verstehen unter k jetzt eine Primzahl und setzen

$$\varphi_1 = u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_kx_k,$$

in welcher Function die u_α unbestimmte Constanten bedeuten sollen. Es seien ferner $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ die Werthe von φ_1, welche aus einem unter ihnen durch die Anwendung aller Substitutionen der symmetrischen Gruppe S hervorgehen. Wenn wir auf die Reihe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ eine Substitution s_i von H anwenden, so entsteht eine neue Reihe $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}, \ldots$, und der Uebergang von der ersten zur zweiten kann als eine Substitution σ_i unter den Elementen φ aufgefasst werden. Die h so entstehenden Substitutionen σ_i sind für $n>4$ von einander verschieden; sie bilden eine zu H einstufig isomorphe Gruppe Φ. Wir wollen nun abzählen, wie viel Cykel erster Ordnung in Φ vorkommen. Nach dem Satze II. erhalten wir für diese Anzahl $h.m_1$, wobei m_1 die Anzahl der Klassen von φ_1 innerhalb Φ angiebt und also anzeigt, in wieviele transitive Gruppen Φ zerfällt. Andererseits bleibt ein $\varphi_\alpha = u_1x_{\alpha_1}+u_2x_{\alpha_2}+\cdots+u_kx_{\alpha_k}$ nur dann ungeändert bei der Substitution σ_i, welcher s_i aus H entspricht, wenn dieses letztere die Elemente $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots x_{\alpha_k}$ nicht enthält. Gehen aber in ein s_i aus H genau $\lambda>k$ Elemente x nicht ein, dann bleiben, wie sofort ersichtlich ist, von den Werthen φ gerade $\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1) = k!\binom{\lambda}{k}$ ungeändert. Ist also h_λ die Anzahl der Substitutionen von H, welche genau λ Elemente x nicht ändern, dann wird

$$(12.) \qquad k!\sum_{\lambda=k}^{n}\binom{\lambda}{k}h_\lambda = m_1h.$$

Zweitens betrachten wir die Function

$$\psi_1 = x_1x_2^2+x_2x_3^2+\cdots+x_kx_1^2;$$

ferner die Werthe $\psi_1, \psi_2, \ldots$ derselben, welche durch die symmetrische Gruppe hervorgerufen werden; endlich die zu H einstufig isomorphe Gruppe Ψ

der Elemente ψ. Wir wollen auch hier untersuchen, wie oft in Ψ ein Element ungeändert bleibt. Zuerst liefert wieder der Satz II. die Zahl $h.n_1$, wobei n_1 angiebt, in wie viele transitive Gruppen Ψ zerfällt. Andrerseits bleibt, da k eine Primzahl ist, ein ψ nur bei zwei Arten von Substitutionen aus H ungeändert; einmal bei solchen, die $x_1, x_2, \ldots x_k$ überhaupt nicht enthalten, zweitens bei solchen, die den Cyklus $\varpi_\lambda = (x_1 x_2 \ldots x_k)^\lambda$ enthalten. Besitzt ein s_i aus H genau $\lambda \geqq k$ Elemente nicht, so findet man wie oben, dass die ihm entsprechende Substitution σ der isomorphen Gruppe gerade $(k-1)!\binom{\lambda}{k}$ Werthe von ψ ungeändert lässt. Ferner wird ein

$$\varpi = (x_1 x_2 \ldots x_k)$$

ausser ψ_1 noch

$$x_1 x_3^2 + x_2 x_4^2 + \cdots, \quad x_1 x_4^2 + x_2 x_5^2 + \cdots, \quad \ldots, \quad x_1 x_k^2 + x_2 x_1^2 + \cdots$$

nicht ändern, also im Ganzen $(k-1)$ Elemente ψ an ihrer Stelle lassen. Das ergiebt

$$(13.) \qquad (k-1)! \sum_{\lambda=k}^{n} \binom{\lambda}{k} h_\lambda + (k-1) C_\varpi = n_1 h,$$

wobei C_ϖ die Anzahl der in H vorkommenden Cykel $k$ter Ordnung angiebt. Combinirt man jetzt (12.) mit (13.), so folgt

$$(14.) \qquad k C_\varpi = \left(n_1 - \frac{n_1 - m_1}{k-1}\right) h.$$

Nach dem Satze II., Formel (4.) ist die linke Seite von (14.) ein ganzes Vielfaches von h; folglich ist $(n_1 - m_1)$ durch $(k-1)$ theilbar. Rechnet man nun alle diejenigen Werthe einer Function zu einer ***Klasse modulo H,*** welche durch Substitutionen von H in einander transformirt werden können, dann geben n_1 und m_1 die Anzahlen der Klassen von ψ resp. von φ modulo H an. Da die Differenz $(n_1 - m_1)$, unabhängig von der zu Grunde gelegten Gruppe H, durch $(k-1)$ theilbar ist, so ergiebt sich:

IX. ***Bedeutet k eine Primzahl, dann ist die Anzahl der Klassen von***

$$\varphi = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_k x_k$$

derjenigen von

$$\psi = x_1 x_2^a + x_2 x_3^a + \cdots + x_k x_1^a$$

in Beziehung auf jede beliebige Gruppe congruent mod. $(k-1)$.

So ist beispielsweise für $H = \{(x_1 x_2), (x_3 x_4 x_5)\}$ und $k = 3$ die Anzahl der Klassen $m_1 = 11$; $n_1 = 5$.

Die Erweiterungen dieses Satzes erweisen sich als ziemlich complicirt *).

§ 5.

Von jetzt ab wollen wir unter p^σ stets die höchste Potenz der Primzahl p verstehen, welche in $n!$ aufgeht. Dann giebt es, wie *Cauchy* gezeigt hat, eine Gruppe G_0 vom Grade $n_0 = pE\left(\frac{n}{p}\right) \leqq n$ und von der Ordnung p^σ. Aus der Construction derselben, wie sie beispielsweise in meiner Substitutionentheorie § 39 angegeben ist, ersieht man, dass die n_0 Elemente sich zu je p und p anordnen

$$x_1^1, x_2^1, \ldots x_p^1; \quad x_1^2, x_2^2, \ldots x_p^2; \quad \ldots; \quad x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots x_p^\alpha; \quad \ldots$$

derart, dass jede Substitution von G, welche die Folge $x_k^\alpha x_\lambda^\beta$ enthält, auch x_{k+1}^α in $x_{\lambda+1}^\beta$ überführt. Daraus erhellt:

X. *G_0, die Gruppe der Ordnung p^σ von n_0 Elementen, zerfällt in eine Reihe transitiver, nicht-primitiver Gruppen, deren Grade einzeln Potenzen von p sind; nur wenn bei einem transitiven Theile die Grad- und die Ordnungszahl gleich p^1 ist, wird derselbe primitiv.*

Da jede Gruppe, deren Ordnung eine Potenz der Primzahl p und deren Grad nicht grösser als n ist, einer Untergruppe von G_0 ähnlich wird, und da X. auch von jeder Untergruppe von G_0 gelten muss, so erkennt man:

X^a. *Jede Gruppe G, deren Ordnung eine Potenz der Primzahl p ist, zerfällt in eine Reihe transitiver, nicht-primitiver Gruppen, deren Grade einzeln Potenzen von p sind; nur wenn bei einem transitiven Theile die Grad- und die Ordnungszahl gleich p^1 ist, wird derselbe primitiv.*

Ist insbesondere die Gruppe H der Ordnung p^α transitiv, also der Grad derselben gleich einer Potenz p^α, dann werden die einzelnen Systeme

---

*) Am Schlusse dieses Abschnittes mögen noch folgende Sätze Platz finden: Bedeutet C_k die Anzahl aller in H überhaupt vorkommenden Cykel $k$ter Ordnung, so ist

$$1C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n = \sum_{k,\lambda} k.\lambda.h_\lambda^{(k)} = n.h.$$

Dies ergiebt sich, wenn man in jede der h Substitutionen von H jedes der n Elemente $x_1, x_2, \ldots x_n$, nöthigenfalls in einem Cyklus erster Ordnung eingehen lässt und die Anzahl der aufgeschriebenen Symbole zweifach zählt. — Hieraus findet man nach der Methode von § 4 z. B. Folgendes:

$$\sum_{k,\lambda} [k(k-1)C_k + 2k\lambda C_{k,\lambda}] = n(n-1)h,$$

wo $C_{k,\lambda}$ angiebt, wie oft in H eine Substitution einen Cyklus $k$ter und einen solchen λter Ordnung enthält.

der Nicht-Primitivität durch die Substitutionen der Gruppe unter einander vertauscht werden. Diese Vertauschungen kann man wieder als Substitutionen auffassen und gelangt dadurch zu einer Gruppe von $p^{\alpha-1}$ Elementen, deren Ordnung $p^{\mu-\mu_1}$ werden mag. Diese Gruppe ist wiederum transitiv und nicht-primitiv, und da in ihr wiederum je p Elemente ein System der Nicht-Primitivität bilden, so besitzt H auch umfassendere Systeme der Nicht-Primitivität von je p^2 Elementen. In derselben Weise kann man fortgehen, so dass hieraus die Richtigkeit des folgenden Satzes erhellt:

XI. ***Jede transitive Gruppe H der Ordnung p^μ und des Grades p^α besitzt engere und umfassendere Systeme der Nicht-Primitivität und zwar solche von p, p^2, ... $p^{\alpha-1}$ Elementen. Daher entspricht dem H eine Reihe transitiver, isomorpher Gruppen***

$$H_1, \quad H_2, \quad H_3, \quad \ldots \quad H_{\alpha-1}$$

der Grade

$$p^{\alpha-1}, \quad p^{\alpha-2}, \quad p^{\alpha-3}, \quad \ldots \quad p^1$$

und der Ordnungen

$$p^{\mu-\mu_1}, \quad p^{\mu-\mu_2}, \quad p^{\mu-\mu_3}, \quad \ldots \quad p^{\mu-\mu_{\alpha-1}} = p^1.$$

Dass $p^{\mu-\mu_{\alpha-1}}$ den Werth p^1 besitzt, folgt daraus, dass es nur einen einzigen Typus transitiver Gruppen vom Grade p^1 giebt, deren Ordnung eine Potenz von p ist. Die isomorphen Gruppen H_1, H_2, ... entstehen, wie schon angedeutet wurde, durch die Versetzungen, welche H in den einzelnen Systemen der Nicht-Primitivität hervorruft.

§ 6.

Wir wollen für die Nicht-Primitivität transitiver Gruppen der betrachteten Art einen Beweis geben, der sich von der Constitution derselben loslöst und an zwei Hülfssätze anknüpft, die für die Theorie der nicht-primitiven Gruppen auch ausserhalb der vorliegenden Untersuchungen von Wichtigkeit sind.

XII. ***Enthält eine primitive Gruppe K des Grades n Substitutionen von weniger als n Elementen, dann besitzt K eine Untergruppe genau vom Grade $(n-1)$; oder in anderer Form: Eine transitive Gruppe K von n Elementen, welche keine transitive oder intransitive Untergruppe von genau $(n-1)$***

Elementen, wohl aber eine solche von geringerem Grade enthält, ist nicht-primitiv *).

Es sei L eine, der Voraussetzung nach vorhandene Untergruppe von K mit $\lambda < n$ Elementen, welche wir durch $x_1, x_2, \ldots x_\lambda$ bezeichnen wollen. Ist $\lambda < \frac{n}{2}$, dann giebt es zufolge der Primitivität von K in dieser Gruppe eine Substitution s_1, welche auf eins der Elemente von L ein anderes derselben, auf ein zweites von ihnen dagegen ein neues, nicht in L vorkommendes Element folgen lässt. Dann enthält $L_1' = s_1^{-1} L s_1$ neben alten Elementen von L zugleich neue, so dass $L_1 = \{L, L_1'\}$ mehr als λ Elemente aufweist. Ist die Zahl λ_1 derselben noch kleiner als $\frac{n}{2}$, dann kann man mit Hülfe einer zweiten Substitution s_2 zu $L_2 = \{L_1, s_2^{-1} L_1 s_2\}$ mit einer noch grösseren Zahl λ_2 von Elementen gelangen, u. s. f. Es sei nun diese Zahl λ_2 schon gleich oder grösser als $\frac{n}{2}$; die Elemente, welche in L_2 transitiv mit einander verbunden sind, oder auch in einzelne transitive Systeme zerfallen, mögen $x_1, x_2, \ldots x_{\lambda_2}$ heissen; dann giebt es, wiederum wegen der Primitivität von K, ein s_3, welches auf eins der nicht in L_2 vorhandenen Elemente ein anderes solches, dagegen auf ein zweites nicht in L_2 vorhandenes Element eins aus der Reihe $x_1, x_2, \ldots x_{\lambda_2}$ folgen lässt. Dann wird $L_3' = s_3 L_2 s_3^{-1}$ mit $x_1, x_2, \ldots x_{\lambda_2}$ neue Elemente verbinden; aber ein neues bleibt wegen der Wahl von s_3 ausserhalb der Gruppe L_3', und endlich enthält L_3', da $\lambda_2 \geqq \frac{n}{2}$ ist, auch noch alte Elemente; folglich besitzt $L_3 = \{L_2, L_3'\}$ wiederum mehr Elemente als L_2, aber weniger als K selbst. Fährt man so fort, dann gelangt man zu einer Gruppe L_ν von genau $(n-1)$ Elementen, wie behauptet war. Diese Gruppe L_ν kann transitiv oder intransitiv sein, und im letzten Falle ist es auch möglich, dass sie keine Substitutionen enthält, welche genau alle $(n-1)$ Elemente umsetzen.

Zusatz. ***Enthält eine primitive Gruppe K des Grades n eine transitive Untergruppe L von weniger als n Elementen, dann werden auch $L_1, L_2, \ldots L_\nu$ transitiv, und K ist mindestens zweifach transitiv.***

---

*) Es ist dieser Satz ein Analogon für das von Herrn ***Frobenius*** gefundene, von Herrn ***Rudio*** (dieses Journal Bd. 102, S. 3) veröffentlichte Theorem. Erwähnt sei, dass in dasselbe eine, unserer letzten Voraussetzung entsprechende Einschränkung aufzunehmen sein wird, was übrigens sofort ersichtlich ist.

Der zweite zu benutzende Hülfssatz ist der folgende:

XIII. ***Jede transitive Gruppe, deren Ordnungszahl ihrer Gradzahl gleich ist, die also ausser der Einheit nur Substitutionen enthält, welche alle Elemente umsetzen, ist nicht-primitiv. Jede ihrer Substitutionen giebt Veranlassung zur Bildung eines Systems der Nicht-Primitivität, indem man alle Elemente eines beliebigen Cyklus einem Systeme zuertheilt.***

Machen wir nämlich alle Elemente $x_1, x_2, \ldots x_\alpha$ eines Cyklus der Substitution s zu einem Systeme, so reicht es aus, zu beweisen, dass jede Substitution, die eins dieser Elemente in sich selbst oder in ein anderes unter ihnen verwandelt, alle unter einander vertauscht. Es möge x_λ eins dieser Elemente sein, und die Substitution t die Folge haben $x_1 x_\lambda$, dann wird eine Potenz s^ν dieselbe Folge besitzen; $t.s^{-\nu}$ ist daher die Einheit, also $t = s^\nu$. Hiermit ist die Behauptung erwiesen. (Vgl. ***Rudio;*** dieses Journal Bd. 102, S. 2). —

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun leicht die Nicht-Primitivität der transitiven Gruppe H des Grades p^λ und der Ordnung p^μ beweisen.

Ist $\lambda = \mu$, dann folgt dieselbe aus dem Satze XIII.

Ist $\lambda < \mu$, dann hat H nach einem bekannten Theoreme Substitutionen von weniger als $(p^\lambda - 1)$ Elementen, und folglich auch eine Untergruppe von geringerem als dem $(p^\lambda - 1)$ten Grade. Wäre nun die Gruppe H primitiv, dann hätte sie nach dem Satze XII. auch eine Untergruppe, welche genau $p^\lambda - 1$ Elemente umsetzt. Danach dürfte die Anzahl der Elemente eines ihrer transitiven Theile nicht durch p theilbar sein, und also könnte ebensowenig die Ordnung von H eine Potenz der Primzahl p werden.

§ 7.

Hieraus, d. h. aus dem Theorem XI., folgt sofort der von Herrn *Frobenius* auf andere Art bewiesene Satz, dass jede Gruppe H der Ordnung p^μ und des Grades p^α eine Untergruppe der Ordnung $p^{\mu-1}$ besitze, wenigstens für transitive H. Denn die Gruppe $H_{\alpha-1}$ der Ordnung p^1 hat die Einheit als ausgezeichnete Untergruppe, und da (vgl. meine Substitutionentheorie § 88) jeder ausgezeichneten Untergruppe einer Gruppe $H_{\alpha-1}$ auch eine ausgezeichnete Untergruppe der isomorphen Gruppe H entspricht, und die Quotienten aus den Ordnungen hier wie dort dieselben sind, so

ist damit gezeigt, dass H eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung $p^{\mu-1}$ besitze.

In gleicher Weise können wir diesen Satz für intransitive Gruppen J beweisen, deren Ordnung eine Potenz von p ist. Denn wenn wir alle in ihr vorkommenden Vertauschungen einer Reihe transitiv verbundener Elemente als eine Gruppe H auffassen, dann ist H isomorph zu J, und zwar entspricht der Einheit in H der Complex derjenigen Substitutionen in J, welche jene transitiv verbundenen Elemente nicht umsetzen. Man kann also auch hier den oben benutzten Satz über das Entsprechen ausgezeichneter Untergruppen bei isomorphen Gruppen zur Anwendung bringen *). —

Aus dem Isomorphismus der transitiven Gruppe H mit $H_{\alpha-1}$ kann noch folgender Schluss gezogen werden: $H_{\alpha-1}$ setzt in allen Substitutionen ausser der Einheit alle p Systeme der Nicht-Primitivität von $p^{\alpha-1}$ Elementen um. Jede der entsprechenden Substitutionen aus H setzt folglich alle p^{α} Elemente um; es können also nur solche Substitutionen von H Elemente ungeändert lassen, welche der Substitution 1 von $H_{\alpha-1}$ entsprechen; dies ist aber nur der $p$te Theil aller vorhandenen. Es folgt somit, dass in H mindestens $p^{\mu-1}(p-1)$ Substitutionen vorkommen, durch welche alle p^{α} Elemente umgesetzt werden. Die Grenze für die Anzahl dieser Substitutionen kann noch erhöht werden. Ist r_0 die Anzahl der wirklich vorhandenen, so lassen von den übrigen $p^{\mu}-r_0$ alle mindestens p Elemente ungeändert, die Einheit sogar p^{α}. Nach dem Satze des Herrn *Frobenius* a. a. O. S. 287 ist also:

---

*) Ich möchte hier erwähnen, dass der Existenzbeweis für Untergruppen der Ordnung $p^{\mu-1}$ sich mit dem Beweise dafür verschmelzen lässt, dass alle möglichen vorhandenen Untergruppen der Ordnung $p^{\mu-1}$ auch ausgezeichnete Untergruppen von H sind; es werden dadurch die beiden von Herrn *Frobenius* auf S. 283 und S. 285 gegebenen Sätze vereinigt. Es kann dies so geschehen, dass man von einer beliebigen Untergruppe K von H ausgeht, und dann nach den Prinzipien und genau in der Art des Herrn *Frobenius* zeigt, dass K nothwendig mit einer umfassenderen Untergruppe L von H vertauschbar sei. Fällt L nicht mit H zusammen, so bildet es schon eine zwischen H und K stehende Untergruppe, mit welcher man in gleicher Weise weiter schliessen kann. Fällt dagegen L mit H zusammen, dann ist K ausgezeichnete Untergruppe von H. Falls der Quotient ihrer Ordnungen grösser als p ist, giebt es in H eine Substitution, von welcher erst die $p$te Potenz zu K gehört; vereinigt man diese Substitution mit K, dann kommt man aufs Neue zu einer Gruppe, die zwischen H und K steht. Dieser Process kann also nur enden, wenn man auf Untergruppen von H der Ordnung $p^{\mu-1}$ kommt; und diese müssen dann ausgezeichnet sein.

$$p(p^\mu - r_0 - 1) + p^\alpha \leqq p^\mu,$$
$$r_0 \geqq p^\mu - p^{\mu-1} + p^{\alpha-1} - 1;$$

XIV. ***Jede transitive Gruppe H der Ordnung p^μ und des Grades p^α enthält mindestens $p^\mu - p^{\mu-1} + p^{\alpha-1} - 1$ Substitutionen, welche sämmtliche p^α Elemente umsetzen.***

Bei intransitiven Gruppen brauchen derartige Substitutionen nicht aufzutreten, wie das einfache Beispiel für J zeigt:

$$J = \{1, (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1x_2)(x_5x_6), (x_3x_4)(x_5x_6)\}.$$

Berlin, November 1887.

Ueber die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe.

(Von Herrn *David Hilbert* in Königsberg i. Pr.)

Die hypergeometrische Reihe:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

wird offenbar dann und nur dann eine ganze Function der Variablen x, wenn wir einen der beiden im Zähler jedes Gliedes auftretenden Parameter gleich einer negativen ganzen Zahl, etwa $\alpha = -n$ ansetzen. Da bei dieser Annahme die obige Reihe mit der $n$ten Potenz der Variablen x abbricht, so führt die Substitution $x = -\frac{x_2}{x_1}$ und die darauf folgende Multiplication mit x_1^n zu der binären Form:

$$f = x_1^n+\binom{n}{1}\frac{\beta}{\gamma}x_1^{n-1}x_2+\binom{n}{2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x_1^{n-2}x_2^2+\cdots+\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x_2^n.$$

Legen wir die allgemeine binäre Form $n$ter Ordnung in der gebräuchlichen Gestalt:

$$a_0x_1^n+\binom{n}{1}a_1x_1^{n-1}x_2+\binom{n}{2}a_2x_1^{n-2}x_2^2+\cdots+a_nx_2^n$$

zu Grunde, so charakterisirt sich die specielle Natur unserer Form f durch die einfache Formel:

$$a_i = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+i-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+i-1)} \qquad (i=0, 1, \ldots n),$$

Im Folgenden wird zunächst gezeigt, wie sich die Discriminante der binären Form f genau und allgemein in ihrer Abhängigkeit von den Parametern β und γ bestimmen lässt.

Wir ertheilen der Form f durch Multiplication mit der Constanten:

$$(1.) \qquad C = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)$$

die von den Nennern befreite Gestalt:

$$\varphi(\beta, \gamma;\ x_1, x_2) = \alpha_0 x_1^n + \binom{n}{1}\alpha_1 x_1^{n-1}x_2 + \cdots + \alpha_n x_2^n,$$

$$\alpha_i = \beta(\beta+1)\ldots(\beta+i-1)(\gamma+i)(\gamma+i+1)\ldots(\gamma+n-1) \quad (i=0, 1, \ldots n),$$

und bemerken dementsprechend, dass sich die Discriminante der letzteren Form als eine ganze rationale Function der Parameter β und γ darstellen muss.

Um nun diejenigen Linearfactoren zu ermitteln, welche überhaupt bei specieller Wahl der Parameter in der hypergeometrischen Reihe F mehrfach auftreten dürfen, setzen wir letztere mit der $p$ten Potenz eines Linearfactors l proportional und leiten aus der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe:

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + \{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{dF}{dx} - \alpha\beta F = 0$$

durch $(p-2)$-fache Differentiation die weitere Differentialrelation ab:

$$x(1-x)\frac{d^pF}{dx^p} + \{(\gamma+p-2)-(\alpha+\beta+2p-3)x\}\frac{d^{p-1}F}{dx^{p-1}}$$

$$-(\alpha+p-2)(\beta+p-2)\frac{d^{p-2}F}{dx^{p-2}} = 0.$$

Da andererseits unserer Annahme zufolge die Differentialquotienten $\frac{d^{p-2}F}{dx^{p-2}}$ und $\frac{d^{p-1}F}{dx^{p-1}}$ den Linearfactor l noch enthalten, während derselbe in $\frac{d^pF}{dx^p}$ nicht mehr aufgeht, so lässt die zuletzt hergestellte Identität für den Linearfactor l nur die Wahl frei zwischen den drei Ansätzen:

$$l = 1, \quad l = x, \quad l = 1-x,$$

oder, wenn wir in der oben beschriebenen Weise von der hypergeometrischen Reihe F zu der homogenen Form f oder φ übergehen:

$$(2.) \qquad l = x_1, \quad l = x_2, \quad l = x_1+x_2.$$

Was die erste Annahme betrifft, so kann offenbar die Form φ nur dann den Factor x_1 mehrfach enthalten, sobald gleichzeitig α_{n-1} und α_n verschwinden, d. h. sobald eine der Relationen:

$$\beta = 0, \quad \beta+1 = 0, \quad \ldots \quad \beta+n-2 = 0$$

besteht, und die Betrachtung der vorangehenden Coefficienten α_{n-2}, α_{n-3}, ... lehrt, dass x_1 als zwei-, drei-, ... oder n-facher Factor in unserer Form φ auftritt, je nachdem bezüglich einer der Ausdrücke:

$$(3.) \qquad \beta+n-2, \quad \beta+n-3, \quad \ldots \quad \text{oder} \quad \beta$$

verschwindet.

Um das letzthin gewonnene Ergebniss zur Auswerthung der Discriminante der vorgelegten Form φ zu verwenden, bedienen wir uns der bekannten allgemeinen Eigenschaft der Discriminante, vermöge welcher dieselbe nebst ihren ersten, zweiten, ... und $k$ten Differentialquotienten nach den Coefficienten der Grundform verschwindet, sobald die letztere einen $(k+2)$-fachen Linearfactor enthält. Denkt man sich nun die Discriminante Δ der Form φ als ganze rationale Function G der Parameter β und γ ausgedrückt, so ergiebt sich des weiteren durch wiederholte Differentiation nach β:

$$\frac{\partial G}{\partial \beta} = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_0}\frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta} + \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \cdots$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_0^2}\left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_0}\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta^2} + \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \beta^2} + \cdots$$

. . . . . ,

woraus wir den Schluss ziehen, dass die ganze Function G bezüglich der Reihe nach die Ausdrücke (3.) je einfach, zweifach, ... $(n-1)$-fach als Factoren enthalten muss. Es erscheint dementsprechend der Ansatz berechtigt:

$$(4.) \qquad G(\beta, \gamma) = (\beta+n-2)(\beta+n-3)^2 \ldots \beta^{n-1} g(\beta, \gamma),$$

worin g wiederum eine ganze rationale Function der Parameter β und γ bedeutet.

Wir unterwerfen jetzt die Grundform φ nach einander zwei speciellen linearen Transformationen, deren Ausführbarkeit auf den beiden folgenden Transformationsformeln der hypergeometrischen Reihe beruht:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (-x)^{-\alpha}\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta-\alpha-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma-\alpha-1)}F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right),$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right).$$

Wir erhalten nämlich hieraus durch Uebergang zu der homogenen und nennerfreien Form φ:

$$\varphi(\beta, \gamma;\ x_1, x_2) = \varphi(-\gamma-n+1, -\beta-n+1;\ -x_2, -x_1),$$

$$\varphi(\beta, \gamma;\ x_1, x_2) = \varphi(\gamma-\beta, \gamma;\ x_1+x_2, -x_2).$$

Da nun die Discriminante einer binären Form eine Invariante von geradem Gewichte ist und die Substitutionsdeterminante jener beiden linearen Transformationen gleich der negativen Einheit ausfällt, so folgt, dass die in Frage kommende Darstellung der Discriminante als ganze rationale Function der beiden Parameter β und γ ungeändert bleibt, wenn wir mit diesen Parametern eine jenen linearen Transformationen entsprechende Aenderung vornehmen, d. h.:

$$G(\beta, \gamma) = G(-\gamma-n+1, -\beta-n+1) = G(\gamma-\beta, \gamma).$$

Hieraus ergeben sich auf Grund der Beziehung (4.) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} G(\beta,\gamma) &= (\beta+n-2)(\beta+n-3)^2\ldots\beta^{n-1}g(\beta,\gamma) \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(\gamma+1)(\gamma+2)^2\ldots(\gamma+n-1)^{n-1}g(-\gamma-n+1, -\beta-n+1) \\ &= (\gamma-\beta+n-2)(\gamma-\beta+n-3)^2\ldots(\gamma-\beta)^{n-1}g(\gamma-\beta,\gamma); \end{aligned}$$

folglich:

$$(5.)\quad \begin{cases} G(\beta,\gamma) = N(\beta+n-2)(\beta+n-3)^2\ldots\beta^{n-1}(\gamma+1)(\gamma+2)^2\ldots \\ \qquad\qquad (\gamma+n-1)^{n-1}(\gamma-\beta+n-2)(\gamma-\beta+n-3)^2\ldots(\gamma-\beta)^{n-1}. \end{cases}$$

Bei den benutzten linearen Transformationen nimmt der obige Linearfactor $l = x_1$ nach einander die weiteren Gestalten (2.) an, so dass sich gleichzeitig durch das eingeschlagene Verfahren die einseitige Bevorzugung des erstgewählten Linearfactors ausgleicht.

Da ferner einer einfachen Ueberlegung zufolge der Grad der Discriminante in Bezug auf jeden der beiden Parameter β und γ dem Gewichte derselben, also der Zahl $n(n-1)$ gleichkommen muss, so zeigt die Vergleichung mit den Gradzahlen in der letzthin gefundenen Gleichung (5.), dass N darin nothwendig eine nur noch von der Ordnung n abhängige Constante bedeutet.

Zur Bestimmung dieser Zahl N legen wir die Discriminante der allgemeinen binären Form $n$ter Ordnung in Gestalt der *Cayley*schen Determinante zu Grunde:

$$(6.)\quad D = \Sigma \pm d_{1,1}d_{2,2}\ldots d_{n-1,n-1},$$

worin die Elemente die folgende Bedeutung besitzen:

$$\begin{aligned} d_{i,k} &= \binom{n-1}{0}\binom{n-1}{i+k-1}(a_0a_{i+k}-a_1a_{i+k-1}) \\ &\quad +\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{i+k-2}(a_1a_{i+k-1}-a_2a_{i+k-2})+\cdots+\binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{k}(a_{i-1}a_{k+1}-a_ia_k). \end{aligned}$$

Denken wir uns hierin für die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ die entsprechenden Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ unserer speciellen Form φ eingesetzt, so gilt die Identität

$$D = G(\beta, \gamma).$$

Da alle Coefficienten der Form φ mit alleiniger Ausnahme von α_0 den Parameter β als Factor enthalten, so ist die Division eines jeden Elementes der Determinante linker Hand durch β möglich, und die darauf folgende Nullsetzung dieses Parameters β führt zu der weiteren Gleichung:

$$\Sigma \pm \delta_{1,1}\delta_{2,2}\ldots\delta_{n-1,n-1} = N(n-2)(n-3)^2\ldots 1^{n-2}\{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)\}^{n-1},$$

wo nun die Determinante linker Hand in Folge der Elementwerthe:

$$\begin{aligned} \delta_{i,n-i} &= 1.2\ldots(n-1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1) \\ \delta_{i,k} &= 0 \end{aligned} \qquad (i+k>n),$$

den Werth:

$$\Sigma \pm \delta_{1,1}\delta_{2,2}\ldots\delta_{n-1,n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\{1.2\ldots(n-1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)\}^{n-1}$$

annimmt. Die Vergleichung der beiden letzten Relationen liefert für die Constante N den gesuchten Werth:

$$N = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 1.2^2\ldots(n-1)^{n-1}.$$

Um schliesslich von der gegenwärtig behandelten Form φ zu der ursprünglich vorgelegten Form f zurückzukehren, bedarf es nur noch einer Division der gefundenen Discriminante G durch die $2(n-1)$te Potenz der Constanten C in (1.), und *man erhält auf diese Weise für die Discriminante der im Endlichen abbrechenden, homogen geschriebenen hypergeometrischen Reihe f den Ausdruck* *):

$$D = \frac{1.2^2\ldots(n-1)^{n-1}(\beta+n-2)(\beta+n-3)^2\ldots\beta^{n-1}(\beta-\gamma-n+2)(\beta-\gamma-n+3)^2\ldots(\beta-\gamma)^{n-1}}{(\gamma+n-1)^{n-1}(\gamma+n-2)^n\ldots\gamma^{2n-2}}.$$

Durch Einführung des speciellen Werthes:

$$\beta = -\gamma-n+1$$

ergiebt sich *die Discriminante der allgemeinen Kugelfunction:*

---

*) Wie ich inzwischen bemerke, ist dieses Resultat bereits von *Stieltjes* auf anderem Wege, nämlich durch successive Berechnung der *Sturm*schen Functionen gefunden worden; vergl. Comptes rendus t. 100 pag. 620.

$$\frac{1.2^2\ldots(n-1)^{n-1}(2\gamma+2n-3)(2\gamma+2n-4)^2\ldots(2\gamma+n-1)^{n-1}}{(\gamma+n-2)^2(\gamma+n-3)^4\ldots\gamma^{2n-2}},$$

und setzen wir überdies noch den Parameter γ der Einheit gleich, so erhalten wir die gewöhnliche Kugelfunction X_n in der bekannten Gestalt *):

$$(7.) \qquad x_1^n+\binom{n}{1}^2 x_1^{n-1}x_2+\binom{n}{2}^2 x_1^{n-2}x_2^2+\cdots+x_2^n,$$

während nunmehr *die Discriminante dieser speciellen Kugelfunction den Werth:*

$$\frac{(n+1)^{n-1}(n+2)^{n-2}\ldots(2n-1)}{1^{2n-3}2^{2n-6}\ldots(n-1)^{3-n}}$$

besitzt.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Beziehung zwischen der *Cayley*schen Determinante (6.) und dem Differenzenproduct für die Wurzeln der betreffenden allgemeinen Gleichung $n$ten Grades durch die Formel:

$$D = \frac{1}{n^n} a_0^{2(n-1)} \Pi(w_i-w_k)^2$$

vermittelt wird. Wir erhalten hiernach beispielsweise *für das Product der Wurzeldifferenzen der gewöhnlichen Kugelfunction* (7.) *den Werth:*

$$\Pi(w_i-w_k)^2 = \frac{1^{2n-1}2^{2n-2}\ldots(2n-1)^1}{\{1^{n-1}2^{n-2}\ldots(n-1)^1\}^4}.$$

Der gefundene Ausdruck für die Discriminante D gestattet eine einfache Anwendung, wenn es sich darum handelt, zu entscheiden, *wie viele reelle Wurzeln die Gleichung nten Grades:*

$$(8.) \qquad \varphi(\beta,\gamma;\ x,1)=0$$

für beliebig gegebene reelle Werthe der Parameter β und γ besitzt. Wir deuten β und γ als rechtwinklige Coordinaten der reellen Punkte einer Ebene, so dass auf diese Weise jedem Punkte der Ebene eine Gleichung der obigen Art zugeordnet erscheint. Lassen wir den Punkt β, γ in der Ebene wandern, so kann die Anzahl der imaginären Wurzelpaare der entsprechenden Gleichung offenbar nur dann eine Aenderung erfahren, sobald jener Punkt die Discriminantencurve $G(\beta,\gamma)=0$, d. h. eine der geraden

---

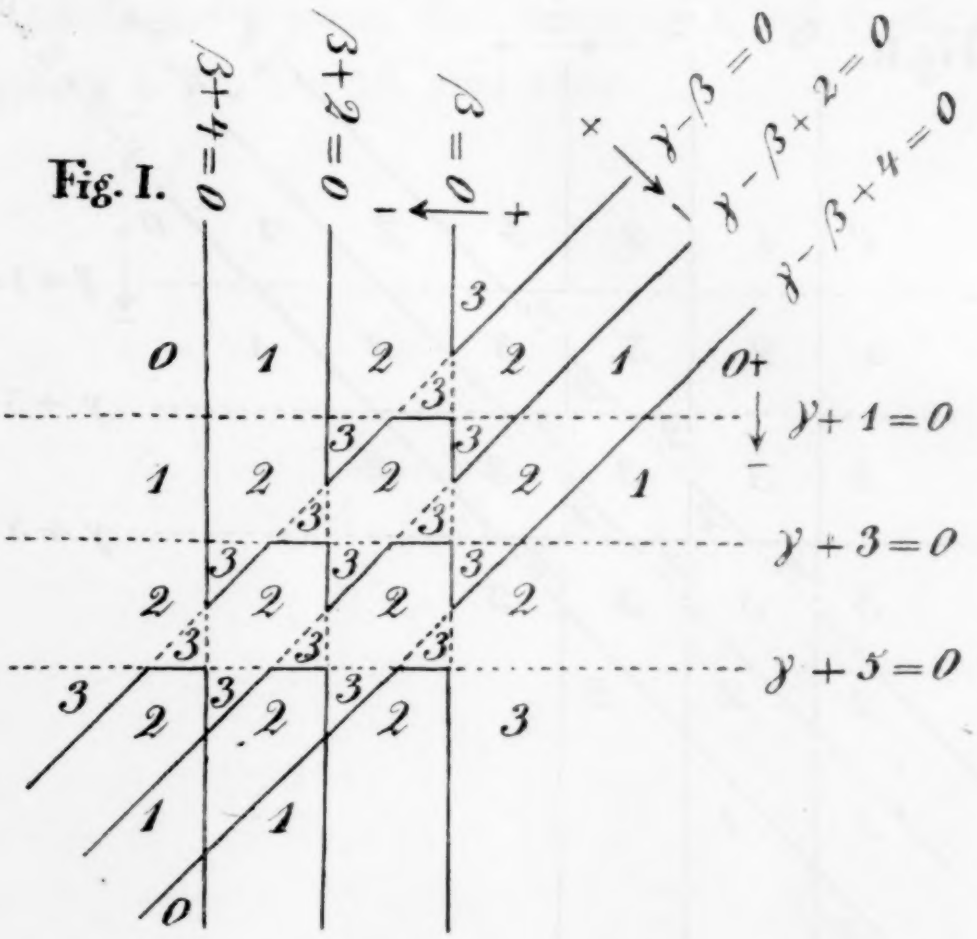
*) Die in Rede stehende Umformung der Kugelfunction entspricht der linearen Transformation des Argumentes $x=\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}$; vgl. *Heine,* Handbuch der Kugelfunctionen, Band I, § 5.

Linien:

$$(9.)\qquad \left.\begin{aligned} \beta+n-i &= 0,\\ \gamma+i-1 &= 0,\\ \gamma-\beta+n-i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (i=2,\ 3,\ \ldots\ n)$$

überschreitet. Der Orientirung halber möge allgemein diejenige Seite dieser geraden Linien die positive heissen, für welche die linken Seiten ihrer bezüglichen Gleichungen (9.) positiv ausfallen, während die gegenüberliegende Seite als die negative zu bezeichnen ist. Durch Berechnung der in Betracht kommenden Wurzeln der Gleichung (8.) in der Nähe einer Ueberschreitungsstelle erhält man betreffs der Aenderung jener Anzahl die erwünschte Auskunft. Ueberschreitet nämlich der Punkt β, γ in der Richtung von der positiven nach der negativen Seite hin eine der geraden Linien (9.), so

Fig. I.



ändert sich die Zahl der imaginären Wurzelpaare der entsprechenden Gleichung (8.) für ein ungerades i garnicht; für ein gerades i dagegen erfährt diese Zahl einen Zuwachs oder eine Abnahme um eine Einheit, je nachdem an der Ueberschreitungsstelle bezüglich die Ausdrücke:

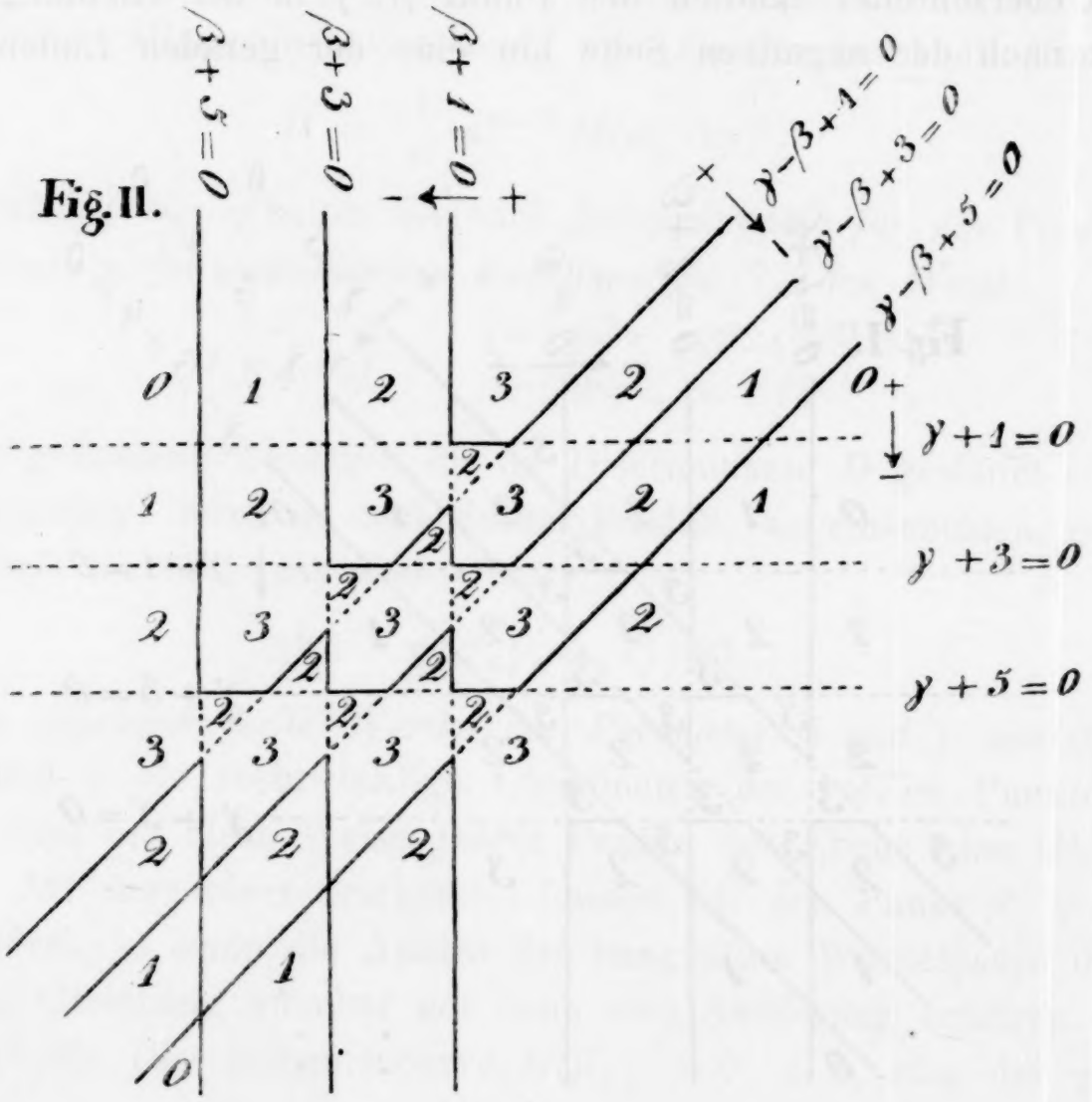
$$(10.)\quad \left\{\begin{array}{r} (\gamma+n-1)(\gamma+n-2)\ldots(\gamma+n-i), \\ -\beta(\beta+1)\ldots(\beta+i-1), \\ \beta(\beta+1)\ldots(\beta+i-1) \end{array}\right\}$$

negativ oder positiv ausfallen. Man construire daher in der $\beta\gamma$-Ebene die geraden Linien:

$$\left.\begin{array}{r} \beta+n-i=0, \\ \gamma+i-1=0, \\ \gamma-\beta+n-i=0, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} i=2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ n & (n \text{ gerade}) \\ i=2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ n-1 & (n \text{ ungerade}) \end{array}$$

welche die γ-Axe beziehungsweise unter den Winkeln 0, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{4}$.

Fig. II.



schneiden. Diese geraden Linien mögen nun streckenweise punktirt oder ausgezogen werden, je nachdem für die betreffende Stelle derselben die Ausdrücke (10.) negativ oder positiv ausfallen. Wie man leicht erkennt, ist dem nach der positiven Richtung der γ-Axe hin sich erstreckenden

Fache des positiven Quadranten die Zahl $\frac{n}{2}$ bei geradem Grade n, dagegen die Zahl $\frac{n-1}{2}$ bei ungeradem Grade n zuzuweisen. Von der bekannten Zahl dieses Faches ausgehend hat man zur Bestimmung der den übrigen Fächern zugehörigen Zahlen die folgende Vorschrift zu beachten. Führt der Weg über eine *punktirte* Grenzlinie in der Richtung von ihrer positiven zu ihrer negativen Seite, so ist dem betretenen Nachbarfache eine um die Einheit *grössere* Zahl zuzuschreiben; führt dagegen der Weg über eine *ausgezogene* Grenzlinie in der Richtung von ihrer positiven zur negativen Seite, so ist dem betretenen Nachbarfache eine um die Einheit *kleinere* Zahl zuzuschreiben. Zur Veranschaulichung mögen die beiden Beispiele $n = 6$ (vergl. Figur I) und $n = 7$ (vergl. Figur II) dienen.

Der Punkt $\beta = -n$, $\gamma = 1$ liegt, wie man leicht einsieht, stets in dem durch die Zahl 0 ausgezeichneten Fache, wodurch der bekannte Satz von der Realität sämmtlicher Wurzeln der Gleichung $X_n = 0$ Bestätigung erhält.

Königsberg i. Pr., den 10. Juni 1887.

Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

In Bd. 101 dieses Journals habe ich eine „Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen“ veröffentlicht in Bezug auf eine Abhandlung des Herrn *Poincaré* „Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires“, die in Bd. 8 der Acta Mathematica im Anschlusse an eine früher von ihm in Bd. 7 des American Journal of Mathematics mitgetheilte Untersuchung erschienen ist. Auf diese Bemerkung hat Herr *Poincaré* in Bd. 10 der Acta eine an mich gerichtete Antwort mitgetheilt. Zur Aufklärung des Sachverhaltes in dieser Discussion komme ich auf dieselbe zurück.

Herr *Poincaré* hat in der genannten Abhandlung, Bd. 8 der Acta, Theoreme aufgestellt, die dahin gehen, dass gewisse Reihenentwickelungen, welche die linearen Differentialgleichungen formal befriedigen, gebraucht werden können, um die Integrale asymptotisch darzustellen, und zwar namentlich auch dann, wenn die Reihen divergiren, und ohne dass man über Con- oder Divergenz derselben etwas weiss. In Bezug auf diese asymptotische Darstellung der Integrale durch formale Reihenentwickelungen sind von mir zwei Bemerkungen gemacht worden. Erstens habe ich an einem einfachen, leicht zu übersehenden Beispiele constatirt, dass die Exponenten in divergenten, die Differentialgleichung formal befriedigenden Reihen zu den Exponenten in den wirklich existirenden Reihenentwickelungen in keiner Beziehung zu stehen brauchen. Nun habe ich dort gesagt: „Divergente Entwickelungen geben daher keinen Aufschluss, wenn es sich um die Beantwortung der ersten Frage in Betreff der Integrale bei einem singulären Punkte handelt, nämlich der Frage nach den Exponenten der Integrale.“ Von diesen Exponenten, und zwar von dem Umstande, ob dieselben ganzzahlig, rational, irrational, complex sind, hängt wesentlich die Natur der Verzweigung der Integrale bei den singulären Punkten ab, blosse Annäherungen leisten für die Einsicht in diese Natur nichts. Sodann habe ich zweitens die Bemerkung gemacht, dass, wenn man die angenäherte Werthberechnung der Integrale in der Nähe eines singulären Punktes vornehmen will, man dieses Resultat mit vorgeschriebenem Grade der Annäherung durch die wirklich bestehenden Integrale, die bei einem nichtsingulären Punkte entwickelt werden, erlangen kann. Dieses sind die Gegenstände, auf die sich Nr. 1 meiner Bemerkung bezieht. Hierbei kam die Frage gar nicht in Betracht, ob die von Herrn *Poincaré* gegebenen asymptotischen Darstellungen der Integrale richtig sind, und ich habe keineswegs Herrn *Poincaré* vorgeworfen, er habe

gesagt, die Exponenten in formalen Entwickelungen seien dieselben, wie in wirklich bestehenden. Die Sache, um die es sich in Nr. 1 meiner Bemerkung handelt, ist vielmehr die: Ich habe in Bezug auf den Gebrauch formaler Reihenentwickelungen zur Untersuchung linearer Differentialgleichungen dasjenige hervorgehoben, was solche formalen Reihenentwickelungen nicht leisten. —

Herr *Poincaré* hat l. c. das Theorem aufgestellt, nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz einer formalen Entwickelung sei die, dass die „transformirte Differentialgleichung von *Laplace* ein Integral besitzt, welches überall im Endlichen einwerthig und stetig ist. Hierüber hat sich Herr *Poincaré* auch noch bei anderer Gelegenheit mit grosser Deutlichkeit ausgesprochen. Derselbe sagt nämlich in der in Paris bei Gauthier-Villars 1886 erschienenen Schrift: Notice sur les travaux scientifiques de *Henri Poincaré* p. 14: Mais, pour que ces séries représentassent les intégrales cherchées, il faudrait qu'elles fussent convergentes, ce qui n'a lieu que dans des cas très particuliers. J'eus l'idée d'appliquer à ces intégrales irrégulières la transformation de *Laplace* et j'obtins ainsi sous une forme nouvelle et simple la condition de convergence de ces séries. In Bezug auf dieses Theorem habe ich in Nr. 2 meiner Bemerkung gesagt, dass diese Convergenzbedingung auf die Lösung einer Aufgabe hinverweist, welche im Allgemeinen nicht leichter, sondern eher schwerer, als die ursprüngliche ist. Herr *Poincaré* giebt dieses in seiner Antwort im Ganzen zu und sagt dann, er hielte es aber nicht für unnütz, bei zwei gleich unlösbaren Problemen zu zeigen, dass sie sich auf einander zurückführen lassen. Nun wenn das Theorem nur diese Bedeutung haben soll, so braucht man allerdings auch nichts weiter gegen die Bedeutung desselben einzuwenden. —

X

	$\tilde{\delta}$	λ	ω
14,	0,199	0,666	28%
15,	0,179	0,712	26%
16,	0,162	0,756	24%
17,	0,146	0,801	22%
18,	0,132	0,844	21%
19,	0,121	0,888	19%
20,	0,110	0,931	18%
21,	0,101	0,973	17%
22,	0,092	1,015	15,7%
23,	0,085	1,055	14,7%

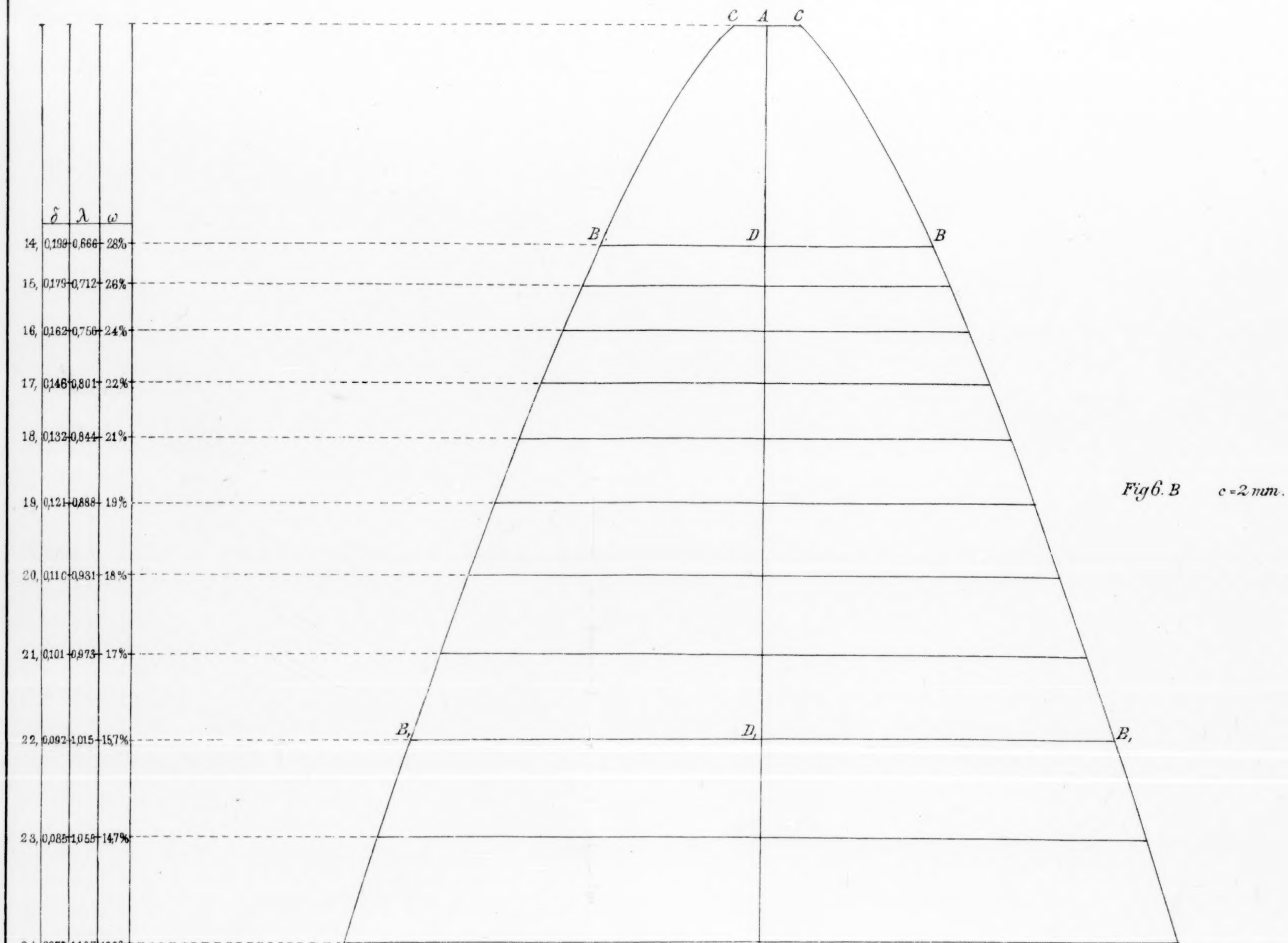


Fig 6. B $c = 2\ mm$.

24, 0,078 1,107 13,8%

25, 0,072 1,140 13,1%

26, 0,067 1,188 12,5%

27, 0,061 1,221 11,7%

28, 0,057 1,260 11,1 %

29 0,053 1,303 10,5 %

B_2 D_2 B_2

B_1

ω *bedeutet den Widerstand der Minimalfläche in Prozenten des Maximalwiderstandes für gleiches Kaliber.*

λ *bedeutet die Länge der Spitze im Verhältniss zum Kaliber.*

δ *bedeutet den Durchmesser der Stirnfläche im Verhältnis zum Kaliber.*

Autogr. d. geogr. lith. Anst. u. Steindr. v. C. L. Keller, Berlin. S.

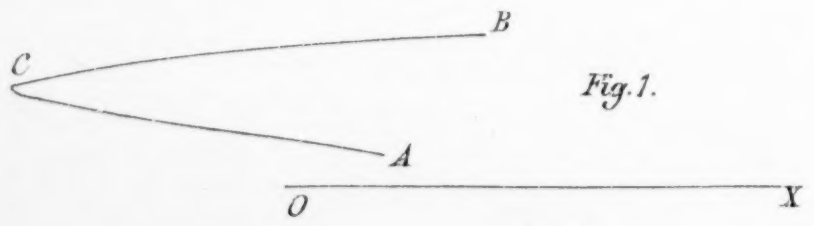


Fig. 1.

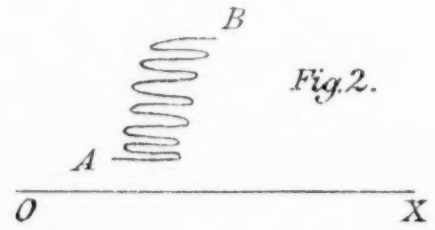


Fig. 2.

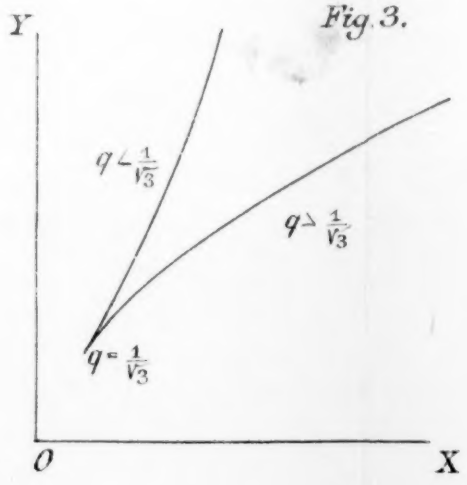


Fig. 3.

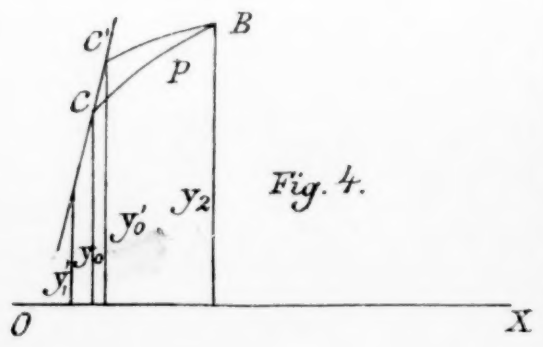


Fig. 4.

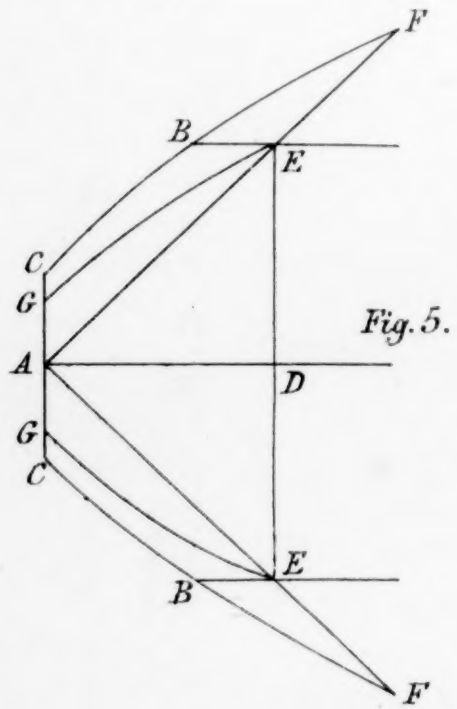


Fig. 5.

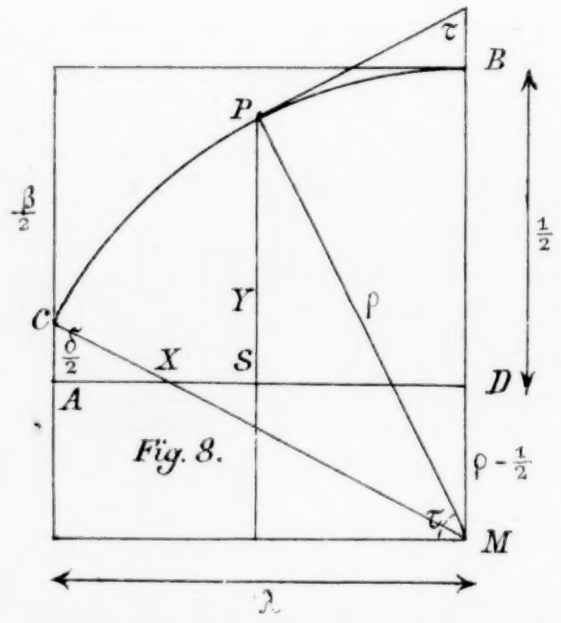


Fig. 8.

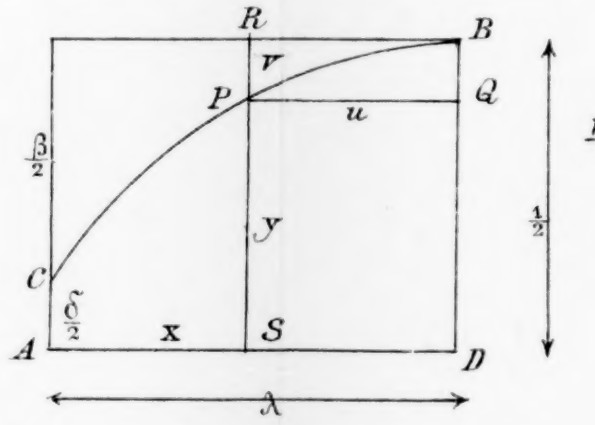


Fig. 7.

ω bedeutet den Widerstand der Minimalfläche in Prozenten des Maximalwiderstandes für gleiches Kaliber.

λ bedeutet die Länge der Spitze im Verhältniss zum Kaliber.

δ bedeutet den Durchmesser der Stirnfläche im Verhältnis zum Kaliber.

	δ	λ	ω
1.	1	0	100 %
2.	0,770	0,098	81 "
3.	0,693	0,141	76 "
4.	0,635	0,186	70 "
5.	0,553	0,234	63 "
6.	0,482	0,288	57 "
7.	0,437	0,332	52 "
8.	0,389	0,381	47 "
9.	0,348	0,430	43 %
10.	0,308	0,479	39 %
11.	0,275	0,526	36 %
12.	0,246	0,574	33 %
13.	0,221	0,620	30 %
14.	0,198	0,666	28 %
15.	0,179	0,712	26 %
16.	0,162	0,756	24 %
17.	0,146	0,801	22 %
18.	0,132	0,844	21 %
19.	0,121	0,888	19 %
20.	0,110	0,931	18 %
21.	0,101	0,973	17 %
22.	0,092	1,015	15,7 %
23.	0,085	1,058	14,7 %

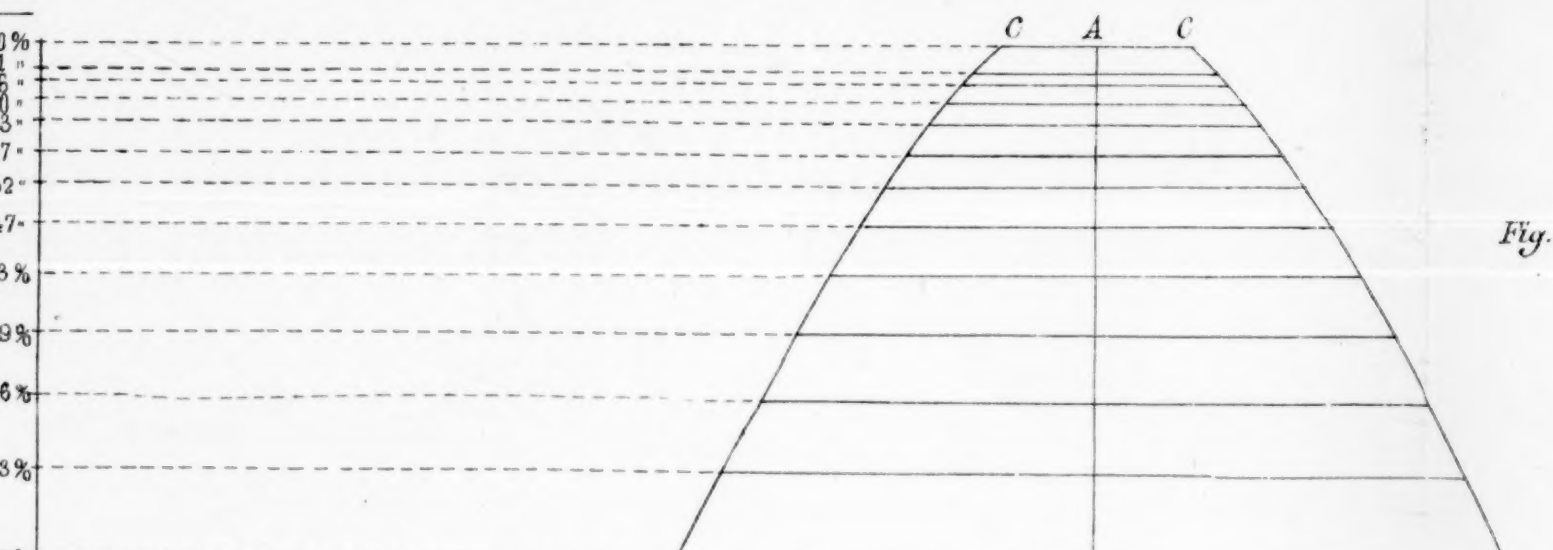
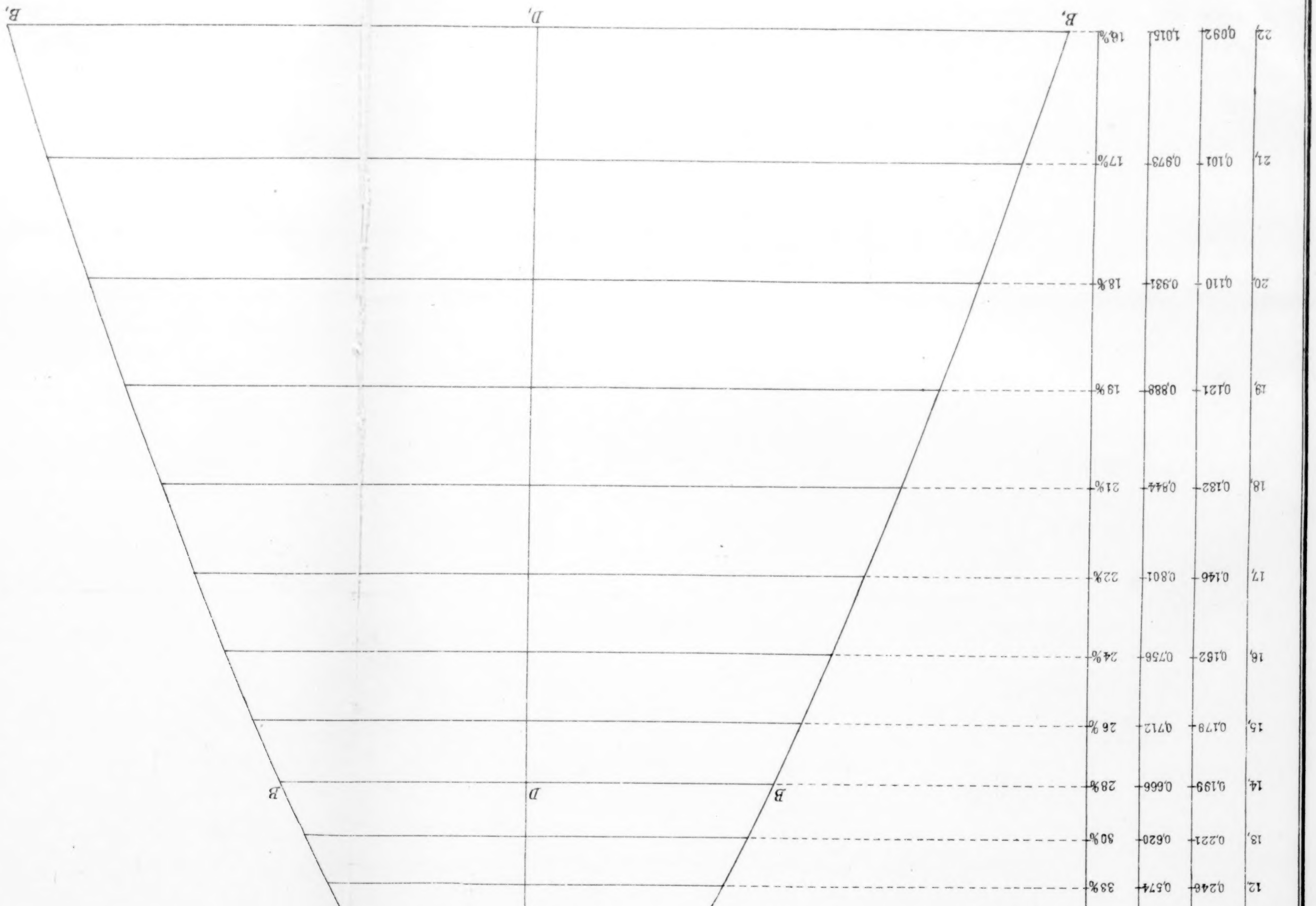


Fig. 6. A. $c = 3\ mm.$


B,
D,
B,
22 0,092 1,015 16% ---------- 0,841 0,182 18
21 0,101 0,873 17% ---------- 0,801 0,146 17
20 0,110 0,931 18% ---------- 0,756 0,162 16
19 0,121 0,888 19% ---------- 0,712 0,179 15
18 0,182 0,844 21% ---------- 0,666 0,199 14
17 0,146 0,801 22% ---------- 0,620 0,221 13
16 0,162 0,756 24% ---------- 0,574 0,246 12
15 0,179 0,712 26% ---------- 0,528 0,276 11
14 0,199 0,666 28% ---------- 0,483 0,310 10
13 0,221 0,620 30% ---------- 0,437 0,350 9
12 0,246 0,574 33% ---------- 0,391 0,397 8
11 0,276 0,528 36% ---------- 0,345 0,455 7
10 0,310 0,483 39% ---------- 0,299 0,528 6
9 0,350 0,437 43% ---------- 0,253 0,621 5
8 0,397 0,391 47% ---------- 0,207 0,736 4
7 0,455 0,345 52% ---------- 0,161 0,897 3
6 0,528 0,299 58% ---------- 0,115 1,138 2
5 0,621 0,253 65% ---------- 0,069 1,518 1
4 0,736 0,207 73% ---------- 0,023 2,277 0
3 0,897 0,161 82% ---------- 0,046 1,138 1
2 1,138 0,115 92% ---------- 0,092 0,569 2
1 1,518 0,069 104% ---------- 0,138 0,379 3
0 2,277 0,023 117% ---------- 0,184 0,284 4
1 1,138 0,046 131% ---------- 0,230 0,228 5
2 0,569 0,092 147% ---------- 0,276 0,190 6
3 0,379 0,138 165% ---------- 0,322 0,163 7
4 0,284 0,184 185% ---------- 0,368 0,142 8
5 0,228 0,230 208% ---------- 0,414 0,126 9
6 0,190 0,276 234% ---------- 0,460 0,114 10
7 0,163 0,322 263% ---------- 0,506 0,103 11
8 0,142 0,368 296% ---------- 0,552 0,095 12
9 0,126 0,414 333% ---------- 0,598 0,088 13
10 0,114 0,460 374% ---------- 0,644 0,082 14
11 0,103 0,506 421% ---------- 0,690 0,076 15
12 0,095 0,552 473% ---------- 0,736 0,072 16
13 0,088 0,598 532% ---------- 0,782 0,068 17
14 0,082 0,644 597% ---------- 0,828 0,064 18
15 0,076 0,690 671% ---------- 0,874 0,061 19
16 0,072 0,736 754% ---------- 0,920 0,057 20
17 0,068 0,782 847% ---------- 0,966 0,054 21
18 0,064 0,828 951% ---------- 1,012 0,051 22
19 0,061 0,874 1,068% ---------- 1,058 0,049 23
20 0,057 0,920 1,199% ---------- 1,104 0,046 24
21 0,054 0,966 1,346% ---------- 1,150 0,044 25
22 0,051 1,012 1,511% ---------- 1,196 0,042 26
23 0,049 1,058 1,697% ---------- 1,242 0,040 27
24 0,046 1,104 1,905% ---------- 1,288 0,038 28
25 0,044 1,150 2,139% ---------- 1,334 0,037 29
26 0,042 1,196 2,401% ---------- 1,380 0,035 30
27 0,040 1,242 2,695% ---------- 1,426 0,034 31
28 0,038 1,288 3,026% ---------- 1,472 0,033 32
29 0,037 1,334 3,397% ---------- 1,518 0,032 33
B,
D
B,

Bind in

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.

Band 103.

Heft IV.

Ausgegeben den 24. September.

Berlin, 1888.

Druck und Verlag von Georg Reimer.